PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 19. 1. Oktober 1908. 9. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 20 am 28. September 1908.

INHALT.

Originalmitteilungen:

M. Laue, Das Zeeman-Phänomen und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik. S. 617.

L. Heis, Beiträge zur Theorie der konvektiven Strömung der Elektrizität in dichten ionisierten Gasen. S. 620.

D. Roschansky, Zur Frage des Funkenwiderstandes. S. 627.

D. Roschansky, Zur Theorie des sogenannten Funkenwiderstandes. S. 635.

L. Mandelstam, Zur Theorie der Dispersion. S. 641.

C. W. Lutz, Verbesserungen am Saitenelektrometer. S. 642.

B. Weinberg, Die Kristallisation des unterkühlten Wassers. S. 645.

B. Macků, Über die Bestimmung von Kondensatorschwingungen bei beliebig enger induktiver Koppelung. S. 646.

Besprechungen:

Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik. XXI. S. 647.

A. v. Hübl, Die Entwicklung der photographischen Bromsilber-Gelatineplatte bei zweifelhaft richtiger Exposition. S. 647.

Lüppo-Cramer, Photographische Probleme. S. 647.

P. Hanneke, Photographisches Rezept-Taschenbuch. S. 647.

R. Neuhauß, Anleitung zur Mikrophotographie. S. 647.

H. Schmidt, Photographisches Hilfsbuch für ernste Arbeit. II. S. 648.

H. Müller u. P. Gebhardt, Die Mißerfolge in der Photographie und die Mittel zu ihrer Beseitigung. II. S. 648.

Universität und Schule. S. 648.

Personalien. S. 648.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Das Zeeman-Phänomen und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik.

Von M. Laue.

Unter demselben Titel veröffentlicht Herr Corbino[1]) im 10. Heft dieser Zeitschrift eine Abhandlung, die beweisen soll, daß zwischen zwei gleichen Strahlungsquellen in zwei gleichen, aber senkrecht aufeinander stehenden Magnetfeldern kein Strahlungsgleichgewicht besteht, wenn sie ein Linienspektrum emittieren, welches das Zeeman-Phänomen in seiner einfachsten Form zeigt. Beruhte die Emission eines solchen Spektrums auf reiner Temperaturstrahlung, so ginge dabei die anfangs bestehende Temperaturgleichheit ohne Kompensation verloren, im Widerspruch zum Entropieprinzip.

Gegen diese Betrachtungen lassen sich nun einige Einwendungen erheben. Zunächst ein unwesentlicher: Herr Corbino meint, eine rechtszirkulare Welle bliebe auch bei Spiegelung rechtszirkular, während sie tatsächlich dabei in eine linkszirkulare übergeht. Ändert man aber seine Betrachtungen dementsprechend ab, so vertauschen nur die beiden Fälle, dass alle Kugeln, welche seine Lichtquellen S_1 und S_2 umgeben, mit Viertelwellenlängenblättchen ausgekleidet sind oder nicht, ihre Rollen.

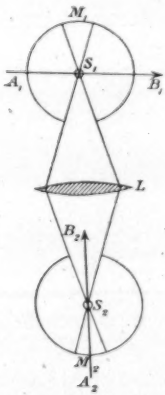
Erheblicher ist dagegen der zweite Einwand, welcher sich gegen die Wahl richtet, welche Herr Corbino für die Intensitäten der Linien des Zeemanschen Tripletts und Dubletts trifft. Ich möchte seine Betrachtungen hier wiederholen, nur mit der Verallgemeinerung, daß ich diese Intensitäten zunächst unbestimmt lasse; den Linien des Tripletts mit den Wellenlängen $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ $(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$ schreibe ich die Intensitäten K_t, K_{1t}, K_{2t}, denen des Dubletts, welche dieselben Wellenlängen λ_1 und λ_2 haben, wie die äußeren Linien des Tripletts, die Intensitäten K_{1d} und K_{2d} zu.

Wir legen also zwei gleiche Strahlungsquellen S_1 und S_2 den Überlegungen zugrunde, beide von solcher Ausdehnung, daß sie alle Strahlungsarten, die sie überhaupt merklich absorbieren, nicht durchlassen, jede im Mittelpunkt einer vollkommen spiegelnden Kugel, deren einzige Öffnung zugleich mit dem Linsensystem L die Abbildung von S_1 auf S_2 vermittelt. Die Pfeile B_1 und B_2 geben die Richtungen der magnetischen Kraftlinien an. Alle Strahlung, welche von S_1 nicht unmittelbar nach der Öffnung oder der ihr gegenüberliegenden Kugelkalotte M_1 emittiert wird, wird von der Kugel nach S_1 reflektiert und von S_1 wieder absorbiert, unter Umständen freilich erst nach nochmaliger Spiegelung; jedenfalls kommt sie für den Wärmeaustausch zwischen S_1 und S_2 nicht in Betracht. Entsprechendes gilt für die Strahlung von S_2.

Zunächst sollen die Kugeln mit einem Viertelwellenlängenblättchen aus doppelbrechender Substanz ausgekleidet sein. Die Strahlung von S_1 von der Wellenlänge λ wird von S_2 überhaupt nicht absorbiert, kehrt also vollständig nach S_1 zurück und spielt daher keine Rolle für den Wärmeaustausch. S_1 emittiert direkt nach S_2 pro Zeiteinheit ein Energiequantum, welches wir in einem geeigneten Maßsystem K_t setzen können; ebensoviel entsendet es gegen

1) O. M. Corbino, diese Zeitschr. **9**, 344—347, 1908.

M_1 und absorbiert auch wieder $2K_t$. Die Strahlung von der Wellenlänge λ_1 von S_1 ist linear polarisiert, sie wird, falls sie nach M_1 emittiert ist, nach einer Spiegelung wieder von S_1 absorbiert. Ist sie dagegen direkt nach S_2 entsandt, so wird sie bei dem ersten Eintreffen daselbst zur Hälfte absorbiert. Was hindurchdringt, ist dann zirkularpolarisiert, ändert an M_2 seinen Polarisationszustand nicht, wird daher bei der Rückkehr nach S_2 vollständig absorbiert. Analoges gilt für die Wellenlänge λ_2. Die Strahlung von S_2 besteht aus zwei zirkularen Wellen; werden diese direkt gegen S_1 emittiert, so absorbiert S_1 beim ersten Eintreffen die eine lineare Komponente von ihnen, während die andere S_1 durchdringt, von M_1 gespiegelt S_1 nochmals durchdringt und nach S_2 zurückgelangt, welches, wie wir soeben sahen, eintreffende lineare Wellen nach einmaliger Reflexion an M_2 vollständig absorbiert. Ebenso verteilen die nach M_2 entsandten Wellen ihre Energie; denn nach ihrer ersten Reflexion von M_2 gehen sie ungehindert durch S_2 hindurch. Alle emittierten und absorbierten Energiebeträge stellen wir zur besseren Übersicht in der folgenden Tabelle zusammen.



Also beträgt:

	die Gesamtemission	die Gesamtabsorption
von S_1	$2(K_t + K_{1t} + K_{2t})$	$2K_t + K_{1t} + K_{2t} + K_{1d} + K_{2d}$
von S_2	$2(K_{1d} + K_{2d})$	$K_{1t} + K_{2t} + K_{1d} + K_{2d}$

Bedingung des Strahlungsgleichgewichts ist, daß für jede Strahlungsquelle Emission und Absorption einander gleich sind. Dies ist der Fall, wenn

$$K_{1d} + K_{2d} = K_{1t} + K_{2t}$$

ist.

Zu demselben Ergebnis gelangen wir, wenn wir nun das Viertelwellenlängenblättchen fortfallen lassen, welches bisher die Kugeln auskleidete. Dann wird der rechtszirkulare Strahl von S_2 nach M_2 bei der Spiegelung linkszirkular und bei der Rückkehr nach S_2 vollständig absorbiert, ebenso wie der in gleicher Richtung entsandte linkszirkulare. Die Strahlung von S_1 gegen M_1 gelangt ebensowenig wie im vorigen Fall nach der Spiegelung durch S_1 hindurch, so daß für den Wärmeaustausch nur die direkt von S_1 nach S_2 und umgekehrt entsandten Strahlungen in Betracht kommen. Und auch von diesen wiederum nicht die von der Wellenlänge λ. Dagegen wird von der linearen Schwingung λ_1 der Strahlung von S_1 in S_2 beim ersten Eintreffen die eine zirkulare Komponente absorbiert, die entgegengesetzt zirkulare gelangt nach M_2, nach der Spiegelung unbehelligt durch S_2 nach S_1, welches die eine lineare Komponente von ihr vernichtet; die andere lineare Komponente wird von M_1 gespiegelt und von S_1 hindurchgelassen, worauf der betrachtete Vorgang sich wiederholt. Die zirkulare Strahlung λ_1 von S_2 wird dagegen in S_1 unter Verlust der halben Intensität linear, wird dann an M_1 gespiegelt und von S_1 hindurchgelassen, so daß auch hier der oben betrachtete Prozeß einsetzt. Für die Wellenlänge λ_2 gilt genau dasselbe. Die emittierten und absorbierten Energiebeträge zeigt die Tabelle auf Seite 619.

Die Forderung der Gleichheit der Emission und Absorption bedingt auch hier die Gleichung

$$K_{1d} + K_{2d} = K_{1t} + K_{2t}.$$

Dies ist also die Beziehung, welche die Thermodynamik für Körper von der er-

	Intensität	S_1 absorbiert hiervon	S_2 absorbiert hiervon
Strahlung von S_1:			
a) direkt nach S_2 . .	$K_t + K_{1t} + K_{2t}$	K_{1t}	$K_{1t} + K_{2t}$
b) nach M_2	$K_t + K_{1t} + K_{2t}$	$K_t + K_{1t} + K_{2t}$	—
Strahlung von S_2:			
a) direkt nach S_1 . .	$K_{1d} + K_{2d}$	$\frac{1}{2}(K_{1d} + K_{2d})$	$\frac{1}{2}(K_{1d} + K_{2d})$
b) nach M_1	$K_{1d} + K_{2d}$	$\frac{1}{2}(K_{1d} + K_{2d})$	$\frac{1}{2}(K_{1d} + K_{2d})$

	Intensität	S_1 absorbiert davon	S_2 absorbiert davon
Strahlung von S_1 . . .	$K_t + K_{1t} + K_{2t}$		
bei dem erst. Eintreffen in S_2			$\frac{1}{2}(K_{1t} + K_{2t})$
bei d. erst. Rückkehr nach S_1		$K_t + \frac{1}{4}(K_{1t} + K_{2t})$	
beim zweit. Eintreffen in S_2			$\frac{1}{8}(K_{1t} + K_{2t})$
b. d. zweit. Rückkehr nach S_1		$\frac{1}{16}(K_{1t} + K_{2t})$	
	etc.		
Strahlung von S_2 . . .	$K_{1d} + K_{2d}$		
beim ersten Eintreffen in S_1		$\frac{1}{2}(K_{1d} + K_{2d})$	
bei d. erst. Rückkehr nach S_2			$\frac{1}{4}(K_{1d} + K_{2d})$
beim zweit. Eintreffen in S_1		$\frac{1}{8}(K_{1d} + K_{2d})$	
bei d. zweit. Rückk. nach S_2			$\frac{1}{16}(K_{1d} + K_{2d})$
	etc.		
Zusammen		$K_t + \frac{1}{3}(K_{1t} + K_{2t}) + \frac{2}{3}(K_{1d} + K_{2d})$	$\frac{2}{3}(K_{1t} + K_{2t}) + \frac{1}{3}(K_{1d} + K_{2d})$

wähnten Ausdehnung fordert, — falls sie überhaupt anwendbar ist.

Die Strahlungsquellen emittieren danach transversal zu den magnetischen Kraftlinien mehr Energie als longitudinal, nämlich $K_t + K_{1t} + K_{2t}$ gegen $K_{1d} + K_{2d}$.[1]) Auffällig ist zunächst, daß dies unabhängig von der Stärke des Magnetfeldes, also scheinbar auch schon in den allerschwächsten Feldern der Fall sein soll, zumal K_t auf keinen Fall als eine mit der Feldstärke verschwindende Funktion der letzteren aufgefaßt werden kann. Wir wollen demgegenüber darauf hinweisen, daß unsere Überlegungen so starke Magnetfelder voraussetzen, daß zwischen den Spektralbereichen der Linien des Dubletts ein dem Spektralbereich der Mittellinie des Tripletts mindestens gleicher Abstand liegt. Andernfalls absorbierte z. B. S_2 auch von der Energie K_t der von S_1 entsandten Strahlung von der Wellenlänge λ. Für schwächere Felder läßt sich unsere Gleichung nicht behaupten.

Denken wir uns unter sonst gleichen Umständen die spiegelnden Kugeln um S_1 und S_2 entfernt, so daß beide Strahlungsquellen jetzt unbehindert in den freien Raum strahlen, so emittieren sie natürlich gleich viel. S_1 absorbiert dann von der Strahlung von S_2 den Betrag $\frac{1}{2}(K_{1d} + K_{2d})$, während S_2 von S_1 den Betrag $\frac{1}{2}(K_{1t} + K_{2t})$ empfängt. Sie strahlen sich also gleiche Wärmemengen zu.

1) Aus § 6 der Abhandlung von Herrn Corbino entnehme ich, daß der Versuch dies bestätigt.

Wie stellt sich nun die magnetooptische Theorie hierzu? Herr Corbino setzt:

$$K_t : K_{1t} : K_{2t} : K_{1d} : K_{2d} = 1 : {}^1/_2 : {}^1/_2 : 1 : 1.$$

Zu diesem Ansatz führt die Vorstellung, daß die Bewegung jedes schwingenden Elektrons sich aus drei Schwingungen mit den den Wellenlängen λ, λ_1, λ_2 entsprechenden Schwingungszahlen zusammensetzt, einer linearen, parallel zu den Kraftlinien und zwei entgegengesetzt zirkularen, in der Ebene senkrecht zu ihnen, wenn man jeder Schwingung gleiche Intensität zuschreibt, — was in Anlehnung an Boltzmanns Satz von der gleichmäßigen Verteilung der Energie über alle Freiheitsgrade wohl gerechtfertigt ist. Für unsere Zwecke wesentlich ist nur der Teil der Proportion, demzufolge

$$K_{1t} = \frac{1}{2} K_{1d},$$

$$K_{2t} = \frac{1}{2} K_{2d}$$

sein soll, was der geforderten Beziehung

$$K_{1d} + K_{2d} = K_{1t} + K_{2t}$$

widerspricht. Und doch ist gerade der hierin ausgesprochene Satz, daß eine zirkulare Schwingung senkrecht zu ihrer Ebene doppelt so stark strahlt, wie in ihr, durch die Maxwellsche Theorie so sicher gestellt, wie weniges in der Physik. Handelte es sich um die Strahlung eines Komplexes weniger Molekeln, so könnte man daher die letztere Gleichung unmöglich gelten lassen. Ein solcher Komplex entspräche aber nicht unserer Annahme, daß die Strahlungsquellen S_1 und S_2 für alle überhaupt merklich absorbierte Strahlung undurchsichtig

sind. Für Körper von solchen Dimensionen treten andere Überlegungen in Kraft.

Bezeichnen wir nämlich mit $\varepsilon\, d\tau\, d\Omega\, d\nu$ die Energie, welche das Volumelement $d\tau$ in den körperlichen Winkel $d\Omega$ hinein pro Zeiteinheit strahlt, und zwar als Strahlung von bestimmter Polarisation, der Schwingungszahl ν und der spektralen Breite $d\nu$, so gilt nach dem Gesagten sicherlich die Proportion

$$\varepsilon_{1t} : \varepsilon_{1d} = \varepsilon_{2t} : \varepsilon_{2d} = 1 : 2 .$$

Ist ferner α der Absorptionskoeffizient für dieselbe Strahlenart und Richtung, auf welche sich auf ε bezieht, so gelangt an die Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers ein Strahl von der spezifischen Intensität

$$\mathfrak{K} = \frac{\varepsilon}{\alpha} .$$

Tritt er dann ohne merkliche Reflexion ins Vakuum aus (die Reflexion an der Oberfläche von S_1 und S_2 haben wir mit Herrn Corbino stets vernachlässigt), so erhält er die spez. Intensität

$$K = \frac{\mathfrak{K}}{n^2} = \frac{\varepsilon}{\alpha n^2} ,$$

wo n den Brechungsindex bezeichnet.[1]) Der Voigtschen Magnetooptik läßt sich nun leicht entnehmen, daß alle Werte n^2 innerhalb der Absorptionsstreifen der Strahlenart, auf die sie sich beziehen, nahezu 1 sind, solange die Absorption mäßig ist und das magnetische Feld ausreicht, um die Triplettlinien vollständig zu trennen. Innerhalb dieser Annäherung gilt für die α, welche wir dem Voigtschen $n\varkappa$ proportional setzen können[2]), genau dieselbe Proportion

$$\alpha_{1t} : \alpha_{1d} = \alpha_{2t} : \alpha_{2d} = 1 : 2 ,$$

wie für die ε.[3]) Daher ist

$$K_{1t} = K_{1d} ,$$
$$K_{2t} = K_{2d} ,$$

in Übereinstimmung mit der obigen Bedingung des Wärmegleichgewichts

$$K_{1t} + K_{2t} = K_{1d} + K_{2d} .$$

Das Zeeman-Phänomen widerspricht also keinenfalls dem Entropieprinzip, während es fraglich bleibt, ob es überhaupt etwas mit ihm zu tun hat.

Berlin, 10. Juni 1908.

(Eingegangen 11. Juni 1908.)

1) Vgl. M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig 1906, die beiden ersten Kapitel. Von Zerstreuung sehen wir ab, obwohl ihre Berücksichtigung kaum etwas änderte.

2) Da $\alpha = \frac{4\pi n\varkappa}{\lambda}$, so ist nur der Unterschied von λ_1, λ_1 und λ_2 dabei vernachlässigt.

3) Man vgl. W. Voigt (Wied. Ann. **67**, 345—365, 1899), Gleichung (27) und (28), sowie W. Voigt (Wied. Ann. **69**, 290—296, 1899), Gleichung (11) und (12). Danach ist der Verlauf der Funktionen nK_+ und $n_1 K_1$, d. h. von α_{1d}, α_{2d} und α_{1t}, α_{2t}, in den zugehörigen Absorptionsstreifen genau der gleiche, nur gilt für entsprechende Stellen der letzteren die angegebene Proportion. Darf man daher die Intensitätsverteilung in allen Linien des Tripletts und Dubletts als gleich annehmen, so gilt das obige Resultat auch unter Berücksichtigung ihrer endlichen Breite.

Beiträge zur Theorie der konvektiven Strömung der Elektrizität in dichten ionisierten Gasen.

Von Leonhard Heis.

J. J. Thomson[1]) hat unter der Annahme, daß der elektrische Strom durch ein Gas ein Konvektionsstrom ist, und daß „die Geschwindigkeit der bewegten Ionen proportional der elektrischen Kraft gesetzt werden kann, die auf sie wirkt", ein System von Differentialgleichungen aufgestellt, welches die Leitung der Elektrizität in dichten ionisierten Gasen beschreibt.

E. Riecke[2]) hat diese Gleichungen erweitert, indem er die Einwirkung der Diffusion der Ionen mit berücksichtigte.

Im Interesse der Vollständigkeit der vorliegenden Untersuchung ist es, an die Schlußfolgerungen dieser beiden Autoren anknüpfend, das Problem zunächst in möglichster Allgemeinheit zu formulieren.

Die Grundgleichungen
(in absoluten elektrostatischen Einheiten geschrieben).

In einem Gase mögen durch Ionisation in der Volumen- und Zeiteinheit q' Ionen, und zwar ebenso viele positive als negative entstehen. Schreibt man beiden Arten gleiche Ladung, nämlich das Elementarquantum ($e = 3{,}410^{-10}$) zu, so ist also die Ionisation Ursache einer Quelle von Elektrizität; es werden in einem beliebigen Aufpunkte

$$q = q'e$$

Elektrizitätseinheiten beiderlei Vorzeichens pro cm³ und Sekunde frei.

Ist dieses ionisierte Gas, welches sich in Ruhe befinden soll, einem elektrostatischen Felde von der Feldstärke $\mathfrak{f}$ unterworfen, so wandern die Ionen mit verschiedenen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_+$ und $\mathfrak{v}_-$, für welche nach der Thomsonschen Annahme folgende Beziehungen bestehen:

$$\mathfrak{v}_+ = U_+\mathfrak{f}, \quad \mathfrak{v}_- = -U_-\mathfrak{f} .$$

1) J. J. Thomson, Elektrizitäts-Durchgang in Gasen; deutsch von E. Marx, 1906, Kap. 3, S. 65 ff.

2) E. Riecke, Beiträge zu der Lehre von der Luftelektrizität. Gött. Wiss. Nachr. 1903, S. 1 u. 2.

Die Proportionalitätsfaktoren U und V heißen die (absoluten) Beweglichkeiten.

Durch diesen Elektrizitätstransport entsteht ein Strom, von der spezifischen Stromdichte $\mathfrak{c}$, der sich aus den partiellen Strömen $\overset{+}{\mathfrak{c}}$ und $\overset{-}{\mathfrak{c}}$ zusammensetzt:

$$\mathfrak{c} = \overset{+}{\mathfrak{c}} - \overset{-}{\mathfrak{c}}. \tag{1}$$

Nach der Formel für konvektive Strömung

$$\mathfrak{c} = \varrho\, \mathfrak{v}$$

erhalten wir daher:

$$\overset{+}{\mathfrak{c}} = \overset{+}{\varrho}\, U \mathfrak{f} \tag{2}$$

$$\overset{-}{\mathfrak{c}} = -\overset{-}{\varrho}\, V \mathfrak{f}, \tag{3}$$

wobei unter $\overset{+}{\varrho}$ die Dichte der positiven Elektrizität, unter $\overset{-}{\varrho}$ die der negativen verstanden ist.

Die freie Elektrizitätsmenge im cm^3 ist demnach:

$$\varrho = \overset{+}{\varrho} - \overset{-}{\varrho}. \tag{4}$$

Die spezifischen Ionenzahlen n und n lassen sich leicht daraus berechnen:

$$\overset{+}{n} = \frac{\overset{+}{\varrho}}{e}, \quad \overset{-}{n} = \frac{\overset{-}{\varrho}}{e}.$$

Nach P. Langevin[1]) ist hauptsächlich die elektrostatische Anziehung der Ionen Ursache einer Wiedervereinigung derselben; es verschwinden in der Volumen- und Zeiteinheit $\alpha\, \overset{+}{n}\, \overset{-}{n}$-Ionen oder $\alpha\, \overset{+}{\varrho}\, \overset{-}{\varrho}$-Elektrizitätsmengeneinheiten beiderlei Vorzeichens, wenn

$$\alpha = \frac{a}{e}; \tag{5}$$

dabei ist nach Langevin:

$$a = 4\pi\varepsilon (U + V) e. \tag{6}$$

ε ist ein Zahlenfaktor, der vom Druck des Gases abhängig ist. Für Luft bei Atmosphärendruck ist z. B.: $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Für den stationären Zustand besteht also für den Zuwachs des positiven Stromes in der Volumeneinheit die Gleichung:

$$\operatorname{div} \overset{+}{\mathfrak{c}} = q - a\, \overset{+}{\varrho}\, \overset{-}{\varrho}; \tag{7}$$

ganz analog gilt für den negativen Strom

$$\operatorname{div} \overset{-}{\mathfrak{c}} = q - a\, \overset{+}{\varrho}\, \overset{-}{\varrho}. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt daher die notwendige Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0. \tag{9}$$

Mit Einbeziehung des Poissonschen Satzes

$$\operatorname{div} \mathfrak{f} = 4\pi\varrho \tag{10}$$

haben wir dann die zur Lösung nötige Anzahl von Gleichungen gewonnen.

1) P. Langevin, Rekombination und Beweglichkeit der Gasionen. Ann. chim. phys. **28**, 433—530.

Aus (1), (2) und (3) erhalten wir für die Stromdichte:

$$\mathfrak{c} = (\overset{+}{\varrho}\, U + \overset{-}{\varrho}\, V) \mathfrak{f}. \tag{11}$$

Nach der Formel

$$\mathfrak{c} = \sigma \mathfrak{f},$$

wobei mit σ die Leitfähigkeit bezeichnet ist, erhalten wir für σ

$$\sigma = \overset{+}{\varrho}\, U + \overset{-}{\varrho}\, V. \tag{12}$$

Wollen wir mit Riecke noch den Einfluß der Diffusion mit berücksichtigen, so müssen wir an den Gleichungen (2) und (3) entsprechende Korrektionsglieder anbringen:

$$\overset{+}{\mathfrak{c}} = \overset{+}{\varrho}\, U \mathfrak{f} - \overset{+}{D} \operatorname{grad} \overset{+}{\varrho}, \tag{13}$$

$$\overset{-}{\mathfrak{c}} = -\overset{-}{\varrho}\, V \mathfrak{f} - \overset{-}{D} \operatorname{grad} \overset{-}{\varrho}. \tag{14}$$

In Anbetracht der Kleinheit der Diffusionskoeffizienten $\overset{+}{D}$ und $\overset{-}{D}$ ist es jedoch bei vielen Problemen erlaubt, diese Glieder nicht zu berücksichtigen; jedenfalls immer dann, wenn:

$$|U\mathfrak{f}| >> \left|\frac{\overset{+}{D}}{\overset{+}{\varrho}} \operatorname{grad} \overset{+}{\varrho}\right| \text{ und } |V\mathfrak{f}| >> \left|\frac{\overset{-}{D}}{\overset{-}{\varrho}} \operatorname{grad} \overset{-}{\varrho}\right|.$$

Näherungsweise Lösung der Grundgleichungen (für den Platten-, Zylinder- und Kugelkondensator).

Die überwiegende Anzahl der Autoren, welche sich mit der Lösung obiger Gleichungen beschäftigt haben, vernachlässigen den Einfluß der Diffusion; auch die vorliegende Lösung verzichtet zunächst auf die Diskussion der Fälle, bei welchen die Diffusion eine wesentliche Rolle spielt. Dagegen soll das Glied, welches der Wiedervereinigung der Ionen Rechnung trägt, von vornherein berücksichtigt werden, während die Mehrzahl der Forscher[1]) sich mit ihren Lösungen in der Nachbarschaft des Sättigungsstromes hielten, in der man von diesem Gliede absehen kann.

Dem Einfluß der Wiedervereinigung hat in der Nachbarschaft des Sättigungsstromes E. Riecke[2]) Rechnung getragen, und zwar für den Platten-, Zylinder- und Kugelkondensator. Auch G. Mie[3]) berücksichtigte für den Fall des Plattenkondensators das Wiedervereinigungsglied und gab, indem er die Integrale nach konvergenten Reihen entwickelte, zwei

1) G. W. Walker, Über Sättigungsströme bei der Ionisation. Phil. Mag. (6) **8**, 656—659. 1904; H. Starke, Über den Potentialverlauf bei der unselbständigen Elektrizitätsleitung der Gase für den Fall des Sättigungsstromes. Boltzmann-Festschrift, S. 667—677, 1904; E. Riecke, siehe loc. cit. S. 2—15.

2) E. Riecke, loc. cit. S. 149 ff., S. 236 ff. Boltzmann-Festschrift, S. 168 ff.

3) G. Mie, Der elektrische Strom in ionisierter Luft usw. Ann. d. Phys. **13**, 857 ff., 1904.

näherungsweise Lösungen, die eine für schwache Ströme, die andere für die Nachbarschaft des Sättigungsstromes. Die Näherung bei diesen beiden Lösungen ist dabei eine derart gute, daß sie mit ihren Gültigkeitsbereichen aneinander grenzen.

Im folgenden soll versucht werden, eine Lösung zu finden, die mit ungefähr gleicher Näherung in dem ganzen Gebiete von der Stromintensität Null bis zum Sättigungsstrome Gültigkeit hat; dabei soll an der bisher üblichen Annahme festgehalten werden, daß die Ionisationsstärke q eine mit dem Ort und der Zeit unveränderliche Größe ist.

Eliminieren wir mit Hilfe von Gleichung (11) und (4) aus (2) und (3) die Größen $\overset{+}{\varrho}$ und $\overset{-}{\varrho}$, so erhalten wir:

$$\overset{+}{\mathfrak{c}} = \frac{UV}{U+V}\varrho\mathfrak{f} + \frac{U}{U+V}\mathfrak{c}, \tag{15}$$

$$\overset{-}{\mathfrak{c}} = \frac{UV}{U+V}\varrho\mathfrak{f} - \frac{V}{U+V}\mathfrak{c}. \tag{16}$$

Mit Berücksichtigung von Gleichung (9) bekommen wir durch Substitution von Gleichung (15) oder (16) in Gleichung (7) oder (8):

$$\frac{UV}{U+V}\operatorname{div}\varrho\mathfrak{f} = q - a\overset{+}{\varrho}\overset{-}{\varrho}.$$

Eliminieren wir hieraus $\overset{+}{\varrho}\overset{-}{\varrho}$, welchen Wert uns das skalare Produkt von Gleichung (2) und (3) liefert, so folgt:

$$\frac{UV}{U+V}\operatorname{div}\varrho\mathfrak{f} = q + \frac{a}{UV\mathfrak{f}^2}(\overset{+}{\mathfrak{c}}\overset{-}{\mathfrak{c}}).$$

Setzen wir noch für $\overset{+}{\mathfrak{c}}$ und $\overset{-}{\mathfrak{c}}$ ihre Werte aus Gleichung (15) und (16) ein, so erhalten wir als Differentialgleichung, deren näherungsweise Lösung wir uns zur Aufgabe gemacht haben:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div}\varrho\mathfrak{f} = q\cdot\frac{U+V}{UV} - \frac{a}{(U+V)\mathfrak{f}^2}\left(\frac{\mathfrak{c}}{V}+\varrho\mathfrak{f}\right)\\ \left(\frac{\mathfrak{c}}{U}-\varrho\mathfrak{f}\right).\end{aligned}\right| \tag{17}$$

Da wir von der Einwirkung der Diffusion absehen, können wir ganz allgemein aus den Gleichungen (2) und (3) schließen, daß die Ionen sich längs der Kraftröhren bewegen. Die Stromröhren fallen demnach der Richtung nach mit den Kraftröhren zusammen und teilen daher mit diesen die Eigenschaft, die Flächen gleichen Potentials senkrecht zu durchdringen. Bezeichnen wir den von einem Ion in der Stromröhre zurückgelegten (im allgemeinen) krummlinigen Weg mit s, den Querschnitt, den die Röhre aus der Potentialfläche im Punkte s herausschneidet mit $\delta\omega$, so können wir Gleichung (17) in folgender Weise vereinfachen:

Ist der Kraftfluß durch die beliebig klein anzunehmende Fläche $\delta\omega$: δE, so ist:

$$\delta E = |f|\,\delta\omega. \tag{18}$$

Die Anwendung des Gaußschen Satzes für das Kraftfeld auf ein Volumenelement ($dv = \delta\omega\, ds$) der Röhre ergibt:

$$\int |f|\, d\delta\omega = 4\pi\varrho\, dv,$$

oder da:

$$\begin{aligned}(|\mathfrak{f}| + d|\mathfrak{f}|)(\delta\omega + d\delta\omega) - |\mathfrak{f}|\,\delta\omega\\ = d|\mathfrak{f}|\,\delta\omega,\\ d\delta E = 4\pi\varrho\, dv.\end{aligned} \tag{19}$$

Da nach (9) $\operatorname{div}\mathfrak{c} = 0$, so erhalten wir für die Stromstärke δI durch die Röhre:

$$\delta I = |\mathfrak{c}|\,\delta\omega = \text{constans}. \tag{20}$$

Bevor wir substituieren, erübrigt es nur noch den Ausdruck $\operatorname{div}\varrho\mathfrak{f}$ umzurechnen.

Wir erhalten zunächst:

$$\operatorname{div}\varrho\mathfrak{f} = \varrho\operatorname{div}\mathfrak{f} + (\mathfrak{f}\operatorname{grad}\varrho)$$

oder

$$= 4\pi\varrho^2 + |f|\frac{d\varrho}{ds}.$$

Wir schreiben hier den totalen Differentialquotienten, da es sich nur um eine ganz bestimmte Stromröhre handelt, die darauf bezüglichen Größen also nur von s allein abhängig sind.

Substituieren wir in obige Gleichung die Werte $|\mathfrak{f}|$ und ϱ aus den Gleichungen (18) und (19), so erhalten wir:

$$\operatorname{div}\varrho f = \varrho\frac{d\delta E}{dv} + \frac{\delta E}{\delta\omega}\cdot\frac{d\varrho}{ds}.$$

Da aber $dv = \delta\omega\, ds$, so resultiert:

$$\operatorname{div}\varrho\mathfrak{f} = \frac{d\varrho\delta E}{dv}. \tag{21}$$

Substituieren wir nun die Werte aus den Gleichungen (18), (20) und (21) in Gleichung (17), so erhalten wir die von vektoriellen Größen freie Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varrho\delta E}{dv} = q\frac{U+V}{UV} - \frac{a}{(U+V)(\delta E)^2}\\ \left(\frac{\delta I}{V}+\varrho\delta E\right)\left(\frac{\delta I}{U}-\varrho\delta E\right).\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

oder mit Anwendung des Langevinschen Ausdruckes für den Wiedervereinigungskoeffizienten (6):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varrho\delta E}{dv} = q\frac{U+V}{UV} - \frac{4\pi\varepsilon}{(\delta E)^2}\left(\frac{\delta I}{V}+\varrho\delta E\right)\\ \left(\frac{\delta I}{U}-\varrho\delta E\right).\end{aligned}\right| \tag{23}$$

Kennten wir für irgendeinen Fall den Verlauf der Stromröhren, so würde die Lösung dieser totalen Differentialgleichung auch das gesamte Strömungsproblem in diesem beliebigen Falle mit ergeben. Im allgemeinen wissen wir aber nichts von der Verteilung der Stromröhren im Raum. Nur für den Fall des Platten- oder des Zylinder- oder des Kugelkondensators wissen wir, daß aus Symmetriegründen die Stromröhren gleicher Ergiebigkeit kongruent sind.

Wir können also für diese für die Praxis wichtigsten Spezialfälle in unserer Differentialgleichung (23) von den durch das Zeichen δ markierten Elementarflüssen zu den Gesamtströmungen direkt übergehen und schreiben:

$$\frac{d\varrho E}{dv} = q\frac{U+V}{UV} - \frac{4\pi\varepsilon}{E^2}\cdot\left(\frac{I}{V}+\varrho E\right)\left(\frac{I}{U}-\varrho E\right).$$

Da nach der Gleichung (19) $4\pi\varrho = \frac{dE}{dv}$, können wir die linke Seite der Gleichung noch weiter vereinfachen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(\varrho E)^2}{dE^2} = q\frac{U+V}{4\pi UV} - \frac{\varepsilon}{E^2}\left(\frac{I}{V}+\varrho E\right)\\ \left(\frac{I}{U}-\varrho E\right).\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Bevor wir diese Gleichung integrieren, wollen wir jedoch die Randbedingungen feststellen, die die Lösung erfüllen muß. Machen wir die Festsetzung, daß die Indizes 1 und 2 sich auf die Anode resp. Kathode beziehen, so muß sein:

$$\int_1^2 |f|\,ds = \int_1^2 \frac{E}{\omega}\,ds = -(\varphi_2-\varphi_1) = \varphi_1-\varphi_2, \quad (25)$$

wenn wir mit φ das Potential bezeichnen, wobei

$$\varphi_1 > \varphi > \varphi_2 \quad (26)$$

sein muß.

Machen wir ferner von der üblichen Annahme Gebrauch, daß $\overset{+}{\varrho}$ an der Anode, $\overset{-}{\varrho}$ an der Kathode verschwindet, so ist

$$\overset{+}{\varrho}_1 = 0 \text{ und } \overset{-}{\varrho}_2 = 0,$$

und aus Gleichung (4) folgt:

$$\overset{-}{\varrho}_1 = -\overset{+}{\varrho}_1 \text{ und } \overset{+}{\varrho}_2 = \overset{-}{\varrho}_2. \quad (27)$$

Daraus folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen (20) und (21) aus Gleichung (11):

$$I = -\overset{+}{\varrho}_1 E_1 V; \qquad I = \overset{-}{\varrho}_2 E_2 U. \quad (28)$$

Aus Gleichung (27) ergibt sich, daß ϱ, als eindeutige und stetige Funktion vorausgesetzt, zwischen Anode und Kathode — wie wir gemäß experimentellen Tatsachen annehmen dürfen — einmal und nur einmal den Wert Null annimmt.

Da aber $\varrho = \frac{1}{4\pi}\frac{dE}{dv}$ und bei obiger Annahme $\frac{d\varrho}{dv}$ immer positiv ist, so schließen wir, daß E ein Minimum E_m dort ist, wo $\varrho = 0$ ist.

Um unsere Differentialgleichung (24) näherungsweise integrabel zu gestalten, wollen wir sie folgendermaßen umformen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(\varrho E)^2}{dE^2} = \frac{U+V}{4\pi UV}q - \frac{\varepsilon}{E^2}\left[\left(\frac{I}{V}\right)^2 - (\varrho E)^2\right]\\ \frac{\frac{I}{U}-\varrho E}{\frac{I}{V}-\varrho E}\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

und speziell den Quotienten

$$\eta_1 = \frac{\frac{I}{U}-\varrho E}{\frac{I}{V}-\varrho E}. \quad (30)$$

zwischen Anode und der Stelle, wo $\varrho = 0$ ist, untersuchen.

Für $\varrho = 0$ ist $\eta_1 = \frac{V}{U}$, und nach Gleichung (28) ist für $\varrho = \varrho_1$ also ϱ_1, $\eta_1 = \frac{V+U}{2U}$; d. h. in dem Anodenraum, wie wir ihn nennen wollen, gilt:

$$\frac{V+U}{2U} < \eta_1 < \frac{V}{U}.$$

Berechnen wir die Abweichungen Δ_1 des kleinsten Wertes von η_1 vom Maximalwert in Prozenten des größten Wertes, so erhalten wir für:

Gas, bei Atmosphärendruck [1])	Δ_1 Proz.	Temperatur ° C.
Luft, trocken	13,6	13,5
„ feucht	4,5	14
Sauerstoff, trocken	12,1	17
„ feucht	7,6	16
Kohlensäure, trocken	3,3	17,5
„ feucht	—4,6	17
Wasserstoff, trocken	6,5	20
„ feucht	2,4	20

$$\Delta_1 = 100\,\frac{V-U}{2V}. \quad (31)$$

Wir sehen also, die Schwankungen des Wertes η_1 sind für eine Reihe von Gasen nicht sehr beträchtlich; es liegt daher nahe, ihn als Konstante in die Differentialgleichung einzuführen und so eine Lösung zunächst für den Anodenfall allein zu suchen. Es handelt sich nur darum, welchen Wert wir für η_1 annehmen? Das zunächst Liegende wäre der Mittelwert der beiden Extreme, eine weitere Überlegung zeigt aber, daß es vorteilhafter ist, den Wert:

$$\eta_1 = \frac{V}{U} \quad (32)$$

zu wählen; denn der Wert des Gliedes in der Differentialgleichung, welches die Wiedervereinigungen berücksichtigt, schwankt in dem untersuchten Gebiete zwischen Null und einem größten Wert, der, wie leicht einzusehen, bei $\varrho = 0$ liegt. Dort ist aber tatsächlich $\eta_1 = \frac{V}{U}$; für die Differentialgleichung begehen wir an dieser Stelle also keinen Fehler. An der Anode aber, wo die Abweichung des Wertes $\frac{V}{U}$ vom wahren Werte von η_1 am größten wäre, ist der absolute Fehler aber auch Null, da das

1) Die Werte für U und V sind Rutherford, Die Radioaktivität, Deutsche Ausgabe, S. 47, 1907, entnommen.

Wiedervereinigungsglied dort verschwindet. Der größte Fehler, den wir mit unserer Annahme machen, liegt daher in dem Zwischengebiet. Ist dies nach ungefährer Schätzung der Fall an der Stelle, wo der Wert des Wiedervereinigungsgliedes zirka die Hälfte des Maximalwertes hat und ist der prozentuale Fehler von η_1 an dieser Stelle zirka die Hälfte des größten prozentualen Fehlers, so ist im ungünstigsten Fall, für trockene Luft, der größte mögliche absolute Fehler des Wiedervereinigungsgliedes ausgedrückt in Prozenten des Maximalwertes des letzteren für die Anode:

$$\frac{1}{4}\,\Delta_1 = 3{,}4 \text{ Proz.}$$

Wir sehen also, die vorliegende Annahme $\eta_1 = \text{constans} = \frac{V}{U}$ führt zu einer Näherung, die wir für das vorliegende Problem als genau genug erachten können, selbst dann, wenn wir den Druck bis ca. 500 mm erniedrigen, da sich nach Langevin die Beweglichkeiten bis zu diesem Drucke umgekehrt proportional mit dem Drucke verändern.

Ganz analog verfahren wir für die Umgebung der Kathode. Die entsprechende Umformung von Gleichung (24) lautet:

$$\frac{d\varrho E_1^{\,2}}{dE^2} = \frac{U+V}{4\pi UV}q - \frac{\varepsilon}{E^2}\left(\frac{I^2}{U^2} - (\varrho E)^2\right)\cdot\eta_2, \quad (33)$$

wobei:

$$\eta_2 = \frac{\frac{I}{V}+\varrho E}{\frac{I}{U}+\varrho E} \quad (34)$$

ist.

Die Schwankungen von η_2 werden beschrieben durch die Ungleichungen:

$$\frac{U}{V} < \eta_2 < \frac{U+V}{2V}.$$

Wir werden auch hier wie oben aus denselben Gründen

$$\eta_2 = \text{constans} = \frac{U}{V} \quad (35)$$

in die Differentialgleichung einführen.

Sinngemäß berechnen sich für verschiedene Gase die Abweichungen Δ_2 des größten Wertes von η_2 von dessen kleinsten $\frac{U}{V}$ in Prozenten des letzteren zu: (siehe nachfolgende Tabelle).

Die entsprechende Schätzung für den Kathodenraum ergibt:

$$\frac{1}{4}\,\Delta_2 = 4{,}7 \text{ Proz.}$$

für den größten möglichen prozentuellen Fehler des Rekombinationsgliedes für den ungünstigsten Fall (trockene Luft).

Gas, bei Atmosphärendruck[1])	Δ_2 Proz.	Temperatur ° C.
Luft, trocken	18,7	13,5
„ feucht	6,2	14
Sauerstoff, trocken	16,0	17
„ feucht	9,0	16
Kohlensäure, trocken . . .	3,5	17,5
„ feucht . . .	−4,2	17
Wasserstoff, trocken . . .	7,5	20
„ feucht	2,5	20

$$\Delta_2 = 100\,\frac{V-U}{2U}. \quad (36)$$

Wir haben durch die Annahmen (32) und (35) noch einen weiteren Vorteil erreicht: für den Fall $\varrho = 0$, also beim Grenzübergange, werden die Gleichungen (29) und (33) identisch, wir haben damit auch den notwendigen stetigen Übergang für die Lösungen erhalten.

Die Differentialgleichungen (29) und (33) sind jetzt integrierbar, sie sind formal identisch der Gleichung, die J. J. Thomson[2]) für den Plattenkondensator, aber nur für den Fall $U = V$ gelöst hat.

Wir wissen, daß E bei $\varrho = 0$ ein Minimum E_m ist. Setzen wir:

$$\frac{E^2}{E_m^{\,2}} = x \quad \text{und} \quad UV\left(\frac{\varrho E}{I}\right)^2 = y \quad (37)\text{u.}(38)$$

und substituieren wir diese Werte in die Gleichungen (29) und (33), so erhalten wir unsere Differentialgleichungen in folgender einfachen Form.

Für den Anodenraum gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(U+V)q\cdot E_m^{\,2}}{4\pi I^2} - \frac{\varepsilon}{x}(1 - y\eta_1), \quad (39)$$

für den Kathodenraum:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(U+V)q\cdot E_m^{\,2}}{4\pi I^2} - \frac{\varepsilon}{x}(1 - y\eta_2). \quad (40)$$

Die Funktion y besitzt also zwei Äste y' und y'', die, wie wir später erkennen werden (siehe Figur), in $x = 1$ eine Schnabelspitze bilden.

Aus (37) und (38) mit (28) erhalten wir den Gültigkeitsbereich des Astes y' und y''.

$$1 < x < x_1; \quad 0 < y' < \eta_2. \quad (41)$$
$$1 < x < x_2; \quad 0 < y'' < \eta_1. \quad (42)$$

Die Variabeln x und y sind dimensionslos; die y-Kurve ist daher charakteristisch für den Kathoden- und Anodenfall.

Der Komplex

$$\frac{(U+V)q\,E_m^{\,2}}{4\pi I^2} = p \quad (43)$$

enthält allein die Daten der äußeren Bedingungen, sofern wir uns das Gas bei bestimmtem Druck gegeben denken (ε, U, V).

1) Die Werte für U und V sind Rutherford, Die Radioaktivität, S. 47, 1907, entnommen.

2) J. J. Thomson, loc. cit.

Der Parameter p definiert somit eindeutig einen gegebenen Fall.

Aus (41) und (42) in (39) und (40) ersehen wir noch, daß:

$$\underset{x=1}{\frac{dy}{dx}} = p - \varepsilon; \quad \underset{x=x_1 \text{ oder } x_2}{\frac{dy}{dx}} = p, \qquad (44) \text{ u. } (45)$$

$\frac{dy}{dx}$ kann nie negativ werden, da y immer positiv ist als Quadrat reeller Größen und da y in dem betrachteten Raum stetig anwächst.

Das erhellt aus den Integralen unserer Differentialgleichungen, die wir ohne weiteres anschreiben wollen:

$$y' = \eta_2 + \frac{p}{1-\varepsilon\eta_1} x - \frac{\eta_2 + p - \varepsilon}{1-\varepsilon\eta_1} x^{\varepsilon\eta_1}. \qquad (46)$$

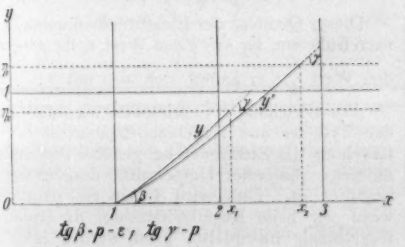
$$y'' = \eta_1 + \frac{p}{1-\varepsilon\eta_2} x - \frac{\eta_1 + p - \varepsilon}{1-\varepsilon\eta_2} x^{\varepsilon\eta_2}. \qquad (47)$$

Dabei wurde die Integrationskonstante gleich so bestimmt, daß für $x = 1$, $y = 0$ ist.

Aus (44) folgt daher für die Grenzen von p

$$\varepsilon < p < \infty. \qquad (48)$$

Für ein gegebenes p können wir somit — ein Gas von gegebener Beschaffenheit vorausgesetzt — die y-Kurve graphisch darstellen (Figur),



da wir ja auch aus (46) und (47) mit Hilfe der Grenzbedingungen (41) und (42) x_1 und x_2 berechnen können.

$$x_1 = \left(\frac{\eta_2 + p - \varepsilon}{p}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon\eta_1}}. \qquad (49)$$

$$x_2 = \left(\frac{\eta_1 + p - \varepsilon}{p}\right)^{\frac{1}{1-\eta_2\varepsilon}}. \qquad (50)$$

Nach Gleichung (19) erhalten wir aus Gleichung (37) und (38):

$$\frac{dx}{+\sqrt{y}} = \frac{8\pi I}{E_m^2 \sqrt{UV}} \cdot dv. \qquad (51)$$

Erinnern wir uns, daß $\sqrt{y}$ dasselbe Vorzeichen wie ϱE haben muß, so erhalten wir zunächst, y als Unabhängige aufgefaßt, durch Integration zwischen den Grenzen 0 und η für die Anode:

$$\int_0^{\eta_2} \frac{dx}{\sqrt{y'}} = \frac{8\pi I}{E_m^2 \sqrt{UV}} (v_0 - v_1), \qquad (52)$$

für die Kathode:

$$\int_0^{\eta_1} \frac{dx}{\sqrt{y''}} = \frac{8\pi I}{E_m^2 \sqrt{UV}} (v_2 - v_0). \qquad (53)$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen, so ergibt sich mit Substitution des Wertes E_m^2 aus Gleichung (43) nach einiger Umformung:

$$I = \frac{2(U+V) q (v_2 - v_1)}{\left(\int_0^{\eta_2} \frac{dx}{\sqrt{y'}} + \int_0^{\eta_1} \frac{dx}{\sqrt{y''}}\right) \sqrt{UV} \cdot p}. \qquad (54)$$

$v_2 - v_1$ ist das konstante von den das Feld begrenzenden Flächen umschlossene Volumen.

Als weitere Grenzbedingung erscheint die Erfüllung der Gleichung (25).

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \frac{E}{\omega} ds = \int_1^2 \frac{E}{\omega^2} dv$$

oder mit Benutzung von Gleichung (37) und (51)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 = E_m \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} dv = \frac{E_m^3 \sqrt{UV}}{8\pi I} \\ \left(\int_0^{\eta_2} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{y'}} + \int_0^{\eta_1} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \frac{dx}{\sqrt{y''}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

oder mit Einsetzung der Werte E_m und I aus den Gleichungen (43) und (54):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 = 2\sqrt{\frac{4\pi (U+V) q}{UV \cdot p}} \\ \cdot \frac{(v_2 - v_1)^2}{\left(\int_0^{\eta_2} \frac{dx}{\sqrt{y'}} + \int_0^{\eta_1} \frac{dx}{\sqrt{y''}}\right)^2} \\ \left(\int_0^{\eta_2} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{y'}} + \int_0^{\eta_1} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \frac{dx}{\sqrt{y''}}\right) \end{aligned}\right\} \cdot \qquad (56)$$

Die bestimmten Integrale der Gleichungen (54) und (56) enthalten als einzige Variable nur noch den Parameter p; wir haben also damit die Abhängigkeit des Stromes von der Potentialdifferenz, die sogenannte „Charakteristik" in Parameterform gefunden und auf Quadraturen zurückgeführt.

Da, wie schon aus Fig. 1 zu ersehen, für sehr großes p, näherungsweise $y = p(x - 1)$ ist, erhalten wir für die Integrale der Gleichung (54) die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{p}\left(\int_0^{\eta_2} \frac{dy}{\sqrt{y'}} + \int_0^{\eta_1} \frac{dy}{\sqrt{y''}}\right) = \frac{2}{p}\left(\sqrt{\eta_2} + \sqrt{\eta_1}\right) = \\ \frac{2}{p}\left(\sqrt{\frac{U}{V}} + \sqrt{\frac{V}{U}}\right) \end{aligned}\right\},$$

dies in Gleichung (54) eingesetzt, ergibt die bekannte Thomsonsche Lösung für den Sättigungsstrom:

$$I = q(v_2 - v_1). \qquad (57)$$

Wir erhalten also für $\rho = \infty$ den Sättigungsstrom.

Für den Fall $\rho = \varepsilon$ läßt sich zeigen, daß wir für kleines y näherungsweise schreiben können:

$$x = 1 + \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\, y.$$

Die Integranten der Gleichungen (54) und (56) werden somit unendlich von der Ordnung $\frac{1}{2}$, für $y = 0$. Deshalb werden auch die Integrale der obigen Gleichungen unendlich von derselben Ordnung und aus Gleichung (56) schließen wir, daß dann, einen Kondensator von endlichen Dimensionen vorausgesetzt, $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ wird; d. h. für $\rho = \varepsilon$ erhalten wir den Fall des Stromes Null bei einem Kondensator von endlichen Abmessungen.

Wir erhalten sonach für einen endlichen Kondensator bei gegebenen Versuchsbedingungen durch Variation von ρ innerhalb der Grenzen ε und ∞ in den Gleichungen (54) und (56) die Charakteristik für alle Einzelfälle.

Den Potentialabfall im Kondensator erhalten wir aus Gleichung (25), indem wir die obere Grenze des Integrals variieren:

$$\varphi_1 - \varphi = E_m \cdot \int_{v_1}^{v} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2}\, dv.$$

Durch Division mit Gleichung (55) erhalten wir, wenn wir analog dieser Gleichung verfahren, für den Anodenraum:

$$\varphi_1 - \varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)\, \frac{\int_{y'}^{\eta_2} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \frac{dx}{\sqrt{y'}}}{\int_0^{\eta_2} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \frac{dx}{\sqrt{y'}} + \int_0^{\eta_1} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \frac{dx}{\sqrt{y''}}}, \qquad (58)$$

für den Kathodenraum:

$$\varphi_1 - \varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)\, \frac{\int_0^{\eta_2} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \frac{dx}{\sqrt{y'}} + \int_0^{y''} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \frac{dx}{\sqrt{y''}}}{\int_0^{\eta_2} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \frac{dx}{\sqrt{y'}} + \int_0^{\eta_1} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \frac{dx}{\sqrt{y''}}}. \qquad (59)$$

Analog erhalten wir durch Integration der Gleichung (51) für den Anodenraum:

$$v - v_1 = (v_2 - v_1) \cdot \frac{\int_{y'}^{\eta_2} \frac{dx}{\sqrt{y'}}}{\int_0^{\eta_2} \frac{dx}{\sqrt{y'}} + \int_0^{\eta_1} \frac{dx}{\sqrt{y''}}}, \qquad (60)$$

für den Kathodenraum:

$$v - v_1 = (v_2 - v_1) \cdot \frac{\int_0^{\eta_2} \frac{dx}{\sqrt{y'}} + \int_0^{y''} \frac{dx}{\sqrt{y''}}}{\int_0^{\eta_2} \frac{dx}{\sqrt{y'}} + \int_0^{\eta_1} \frac{dx}{\sqrt{y''}}}. \qquad (61)$$

Somit erhalten wir auch den Potentialfall in Parameterform aus Gleichung (58) und (60) resp. (59) und (61), wobei y als Parameter des Ortes fungiert.

Für die Fixierung des Ortes $\varrho = 0$ oder $E = E_m$ erhalten wir durch Division der Gleichungen (52) und (53)

$$\frac{v_0 - v_1}{v_2 - v_0} = \frac{\int_0^{\eta_2} \frac{dx}{\sqrt{y'}}}{\int_0^{\eta_1} \frac{dx}{\sqrt{y''}}}. \qquad (62)$$

Dieser Quotient der Elektrodenvolumina hat nach früherem, für $\rho = \varepsilon$ den Wert 1, für $\rho = \infty$ den Wert $\frac{U}{V}$; er ändert sich also mit ρ.

Aus Gleichung (55) schließen wir, daß für den Zylinder und Kugelkondensator die Vertauschung der Elektroden bei gleicher Potentialdifferenz von einer Unipolarität des Stromes begleitet ist. Dies wird besonders deutlich, wenn wir beim Kugelkondensator die äußere Kugelschale unendlich groß werden lassen. Diese Anordnung repräsentiert dann den Fall der Zerstreuung eines geladenen Körpers im freien, mit ionisiertem Gas erfüllten Raum, er ist schließlich auch verwandt den elektrischen Zuständen in der Atmosphäre in der Nähe der Erdoberfläche.

Für diesen Fall ist, wie leicht einzusehen, $\rho = \varepsilon$ und aus Gleichung (43) erhalten wir für den Strom:

$$I = (U + V) \sqrt{\frac{q}{4\pi (U + V)\varepsilon}} \cdot E_m. \qquad (63)$$

Da das Potential im Unendlichen verschwindet, und der Kathodenraum ins Unendliche rückt, so erhalten wir für $E_m{}^2$ aus Gleichung (55) und (63)

$$E_m{}^2 = \frac{2\varphi_1}{\int_0^{\eta_2} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2} \frac{dx}{\sqrt{y'}}} \sqrt{\frac{4\pi q (U + V)}{\varepsilon U V}}. \qquad (64)$$

Analog erhalten wir für negative Ladung des Körpers:

$$E_m^2 = \frac{2\varphi_2}{\int_0^{x_2} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2}\frac{dx}{\sqrt{y''}}} \sqrt{\frac{4\pi q (U+V)}{\varepsilon UV}}. \qquad (65)$$

Da aber offenbar

$$\int_0^{x_2} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2}\frac{dx}{\sqrt{y''}} < \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2}\frac{dx}{\sqrt{y''}}, \qquad (66)$$

so ist die Zerstreuung des positiv geladenen Körpers bei gleichem Potential $|\varphi_1| = |\varphi_2| > 0$ größer als die des negativen.

Der Abfall des Potentials ergibt sich für diesen Spezialfall aus Gleichung (58):

$$\varphi = \varphi_1 \frac{\int_0^{x'} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2}\frac{dx}{\sqrt{y'}}}{\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2}\frac{dx}{\sqrt{y'}}}. \qquad (67)$$

Für den Potentialverlauf der negativ geladenen Kugel erhalten wir:

$$\varphi = \varphi_1 \frac{\int_0^{x'} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2}\frac{dx}{\sqrt{y''}}}{\int_0^{x_2} \frac{\sqrt{x}}{\omega^2}\frac{dx}{\sqrt{y''}}}. \qquad (68)$$

Diese, zuletzt nur flüchtig angedeuteten, auf die Lösung von Quadraturen zurückgeführten Resultate sollen den Charakter einer vorläufigen Mitteilung tragen. Sie sollen zeigen, daß es uns gelungen ist, die Abhängigkeit des Stromes von der Potentialdifferenz für die in der Praxis wichtigsten Fälle, für den Platten-, Zylinder- und Kugelkondensator, durch einen Parameter auszudrücken. Dies erscheint deshalb bemerkenswert, weil die Charakteristik sich direkt aus dem Experiment bestimmen läßt.

In ähnlicher Weise erhielten wir in Parameterdarstellung den Potentialverlauf und fanden aus Werten, welche den Ort $\varrho = 0$ fixieren, daß dieser mit der Potentialdifferenz sich verschiebt.

Das Zerstreuungsproblem und die elektrischen Zustände in der Nähe der Erdoberfläche erweisen sich als Spezialfälle des allgemeinen Falles. Aus der für den Kugelkondensator von der Potentialdifferenz abhängig gefundenen Unipolarität der Ströme läßt sich wohl folgern, daß sie eine Eigenschaft aller Kondensatoren ist, mit Ausnahme des Plattenkondensators.

Die näherungsweise Lösung der in den Schlußresultaten vorkommenden zwei Integralen ist bei der Behandlung einiger wichtiger Fälle einem zweiten Teile vorbehalten. In diesem soll auch eine Abschätzung der durch die eingeführten Näherungen sowie durch Weglassung der Diffusionsglieder entstandenen Fehler erfolgen.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, Juli 1908.

(Eingegangen 31. Juli 1908.)

Zur Frage des Funkenwiderstandes.

Von D. Roschansky.

Um den sogenannten Funkenwiderstand bei einer oszillatorischen Entladung zu messen, hat man bisher eine Anzahl Methoden[1]) vorgeschlagen, die sich in folgende Gruppen einteilen lassen:

1. Methoden, welche den Einfluß der Funkenstrecke auf die Periode der Schwingungen zu bestimmen suchten (Trowbridge, Popoff; die letzte ist nicht publiziert).

2. Diejenigen Methoden, welche direkt auf kalorimetrischem oder bolometrischem Wege die in der Funkenstrecke verbrauchte Energie maßen (Kaufmann, Lindemann, Battelli und Magri).

3. Diejenigen, welche den Einfluß der Funkenstrecke auf den integralen Stromeffekt in irgendeinem Teile des Schwingungskreises, mit dem von einem konstanten Widerstande ausgeübten verglichen (Cardani, Slaby, Simons).

4. Methoden, welche auf Grund der Bjerknesschen und Drudeschen Theorien den Funkenwiderstand dadurch bestimmten, daß sie dessen Einfluß auf die Resonanzkurven in einem mit dem primären schwachgekoppelten Kreise aufsuchten (Drude, Rempp).

Ohne uns an dieser Stelle auf eine Kritik dieser Methoden einzulassen, möge nur bemerkt werden, daß alle Resultate, welche durch diese verschiedenartigen Methoden erhalten wurden, nur dann etwas Zuverlässiges bedeuten und untereinander vergleichbar sein könnten, wenn die Funkenstrecke in jeder Hinsicht einem konstanten Widerstande gleichwertig wäre, was, wie wir sehen werden, im allgemeinen durchaus nicht der Fall ist. Außerdem sind noch die Versuche von Ziegler und Richarz, wie auch die von Zenneck[2]) zu erwähnen, welche wertvolle Hin-

1) Trowbridge, Phil. Mag. (5) **30**, 323, 1890; Kaufmann, Wied. Ann. **60**, 653, 1897; Lindemann, Ann. d. Phys. **12**, 1012, 1903; Battelli u. Magri, d. Ztschr. **8**, 539, 1902; **4**, 181, 1902; Phil. Mag **5**, 1 u. 620, 1902; Cardani, N. Cim. 11, 113, 1900; Slaby, El. Ztschr. **25**, 915, 1904; Simons, Ann. d. Phys. **13**, 1044, 1904; Drude, Ann. d. Phys. 15, 709, 1904; Rempp, Ann. d. Phys. 17, 627, 1905.

2) Richarz u. Ziegler, Ann. d. Phys. 1, 468, 1901; Zenneck, Ann. d. Phys. **13**, 822, 1904.

weise auf die Dämpfung der Schwingungen, allerdings nur in einigen speziellen Fällen enthalten.

Der erste Versuch, die Verhältnisse von theoretischer Seite klarzustellen, stammt von Heydweiller[1]). Es ist ihm auch gelungen, auf Grund einer Hypothese über die Elektrodenspannung an der Funkenstrecke, die von Zenneck und Ziegler-Richarz gefundene Zunahme des Schwingungsdekrementes während der Entladung zu erklären. Zwar ließ sich diese Hypothese durch spätere Untersuchungen zum Teil bestätigen, aber quantitativ war sie unrichtig, da sie auf der Voraussetzung beruhte, daß der Funken bei der oszillatorischen Entladung mit einer Glimmstromerscheinung identisch ist. Als den nächsten Schritt zur Aufklärung der hier obwaltenden Verhältnisse muß die von Simon[2]) aufgestellte Theorie des Wechselstromlichtbogens bezeichnet werden, welche sich auch auf den Fall der Funkenentladung leicht ausdehnen läßt, sobald man dieselbe als einen Wechselstromlichtbogen hoher Frequenz zwischen Metallelektroden betrachtet. Vom Standpunkte dieser Theorie ließen sich manche Gesetzmäßigkeiten voraussehen und erklären, und es war demnach zeitgemäß, den fraglichen Funkenwiderstand auf direktem Wege zu untersuchen.

Ich wurde zu dieser Untersuchung von meinem hochgeehrten Lehrer, Prof. Simon, angeregt und habe die Vorversuche unter seiner Leitung im Institut für Angewandte Elektrizität im Sommer 1906 ausgeführt. Es sei mir gestattet, an dieser Stelle ihm für die wertvollen Ratschläge und den Beistand, sowie für die mir zur Verfügung gestellten Mittel des Instituts meinen herzlichsten Dank auszudrücken. Die Untersuchung wurde später im physikalischen Laboratorium des Elektrotechnischen Instituts in Petersburg zu Ende geführt. Einige Resultate dieser Untersuchung sowie die auf Grund der Simonschen Theorie aufgestellten theoretischen Betrachtungen wurden im Jahre 1907 im Juniheft des Journ. d. Russ. Phys.-Chem.-Ges. publiziert.[3]) Die Untersuchungsmethode war im wesentlichen dieselbe wie das von Prof. Simon angegebene Verfahren zur Untersuchung der dynamischen Charakteristiken des Wechselstromlichtbogens mittelst einer Braunschen Röhre. Es ergab sich dabei, daß die Spannung an der Funkenstrecke nahezu konstant war und von der Amplitude unabhängig zu sein schien. Die Spannung betrug bei 1 mm langer Funkenstrecke ca. 30—40 Volt. Diese einfachen Verhältnisse, welche qualitativ mit der von Heydweiller aufgestellten Hypothese im Einklang waren, ließen sich vom Standpunkte der Simonschen Theorie sehr gut erklären und ermöglichten die Abhängigkeit des Schwingungsdekrementes von Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand des Kreises zu bestimmen. Es wurde auch die Abhängigkeit des Dekrementes von der Funkenlänge diskutiert und versucht, die früher empirisch aufgestellten Gesetzmäßigkeiten durch die entwickelte Theorie zu erklären. Auf Grund der angestellten Betrachtungen und der Versuchsergebnisse konnte auch eine untere Grenze des Schwingungsdekrementes für einen Kreis mit 1 mm langer Funkenstrecke angegeben und die Zunahme des Dekrementes beim Abklingen der Schwingungen erörtert werden.

Etwas später wurde die Arbeit von Barkhausen[1]) publiziert, in der dieselbe Frage behandelt und dieselbe Untersuchungsmethode angewandt wurde. Die Resultate dieser Arbeit waren mit denen in meiner Arbeit enthaltenen fast gleichlautend, es waren aber die von Heydweiller angestellten theoretischen Betrachtungen weiter verfolgt und zur Berechnung des Funkenwiderstandes angewandt.

Die vorliegende Untersuchung bezweckt weitere Einsicht in die Erscheinung zu gewinnen und eine neue Methode zur Messung des Schwingungsdekrementes anzugeben.

Methode.

Die Braunsche Röhre war nach Wehnelt mit einem im Innern sich befindenden Kondensator für Hochspannung versehen, durch welchen ein homogenes Feld zur elektrostatischen Ablenkung des Kathodenstrahles erzeugt und somit die zu untersuchende Spannung bestimmt werden konnte. Die Kondensatorplatten waren 8 cm lang, 6 mm voneinander entfernt und ergaben bei 100 Volt Spannung eine Ablenkung des Kathodenflecks auf dem Schirm von ca. 10 mm, die je nach der Härte der Röhre größer oder kleiner war. Der Kondensator war mit der Funkenstrecke durch zwei Drähte verbunden, die isoliert möglichst dicht aneinander gelegt waren, um deren Selbstinduktion zu vermindern. Der Kondensator konnte nur sehr kurzen Funkenstrecken, nicht über 2 mm, parallel geschaltet werden; wurde nämlich die Spannung weiter erhöht, so bildeten sich zwischen den Platten auf der Oberfläche des Glimmers, das zur Befestigung und Isolierung derselben diente, heftige Gleitfunkenentladungen, durch die das elektrostatische Feld verzerrt wurde. Es war daher nur möglich, die kürzeren Funkenlängen zu untersuchen, meistens von 1 mm Länge. Es steht aber in Aussicht, durch eine leichte

1) Heydweiller, Ann. d. Phys. **19**, 649, 1906.
2) H. Th. Simon, diese Ztschr. **6**, 297, 1905.
3) Roschansky, Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges. **39**, 140, 1907.

1) H. Barkhausen, diese Ztschr. **8**, 624, 1907.

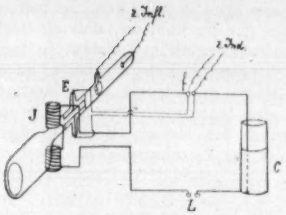


Fig. 1.

Abänderung des Kondensators denselben auch für höhere Spannungen geeignet zu machen. Das Schaltungsschema ist aus der Fig. 1 zu ersehen. Der Schwingungskreis bestand aus einer oder mehreren Leidener Flaschen, parallel geschaltet, einem Rechteck (45 mal 65 cm) aus starkem Kupferdraht und zwei parallelen Drähten (Länge 40 cm, gegenseitiger Abstand 7,5 cm) welche in unmittelbarer Nähe der Röhre endeten und zwischen deren Enden Spulen $\mathcal{J}$ eingeschaltet waren, welche die Stromablenkung des Kathodenflecks bewirkten. Die Selbstinduktion des Kreises war mit einem Dönitzschen Wellenmesser gemessen ca. 7000 cm. Der Kreis war noch an zwei Stellen unterbrochen zur Einschaltung: 1. der Funkenstrecke f mit kugelförmigen Zinkelektroden von ca. 1,5 cm Durchmesser, welche von Zeit zu Zeit mit Stahl abgedreht und poliert wurden; und 2. der Drahtspulen L, um die Selbstinduktion des Kreises zu variieren. Um die Braunsche Röhre vor den elektrostatischen Einwirkungen seitens des Schwingungskreises zu schützen, erwies sich am praktischsten, die Röhre mit feuchtem Filtrierpapier zu bedecken. Es wurde sonst auch brauchbar gefunden, die Röhre an entsprechender Stelle mit isoliertem Kupferdraht zu umwickeln, dessen eines Ende geerdet, das andere isoliert war; dadurch wurde die Röhre mit einem geerdeten Drahtnetz umgeben, in dem sich aber keine induzierten Ströme ausbilden konnten.

Der Schwingungskreis wurde durch ein Induktorium gespeist, das mit einem Tauchunterbrecher von Ducreté betrieben wurde. Die Unterbrechungszahl war je nach Verhältnissen 5—15 mal pro Sekunde. Die Pole waren direkt mit den Elektroden der Funkenstrecke durch eine Drahtleitung verbunden. Es ergab sich dabei ein Übelstand, der nur durch eine Veränderung des Schwingungskreises zum Teil beseitigt werden konnte. Es entstand nämlich auf dem Schirm ein sehr lichtstarker Streifen, der von den Schwingungen in der Sekundärspule des Induktoriums herrührte. Dieser Streifen, welcher der Spannungsablenkung des Kathodenstrahls bei verschwindenden Werten des Stroms im Schwingungskreise entsprach, überdeckte einen Teil der Kurven, welcher den kleinen Stromstärken entsprechen würde, und der gerade von verschiedenen Seiten großes Interesse bietet.

In späteren Versuchen wurde dieser Streifen dadurch beseitigt, daß in dem Schwingungskreise (Fig. 2) zwei Funkenstrecken f_1 und f_2

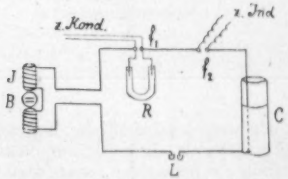


Fig. 2.

angebracht wurden, wobei der kleineren f_2 parallel ein Widerstand gelegt wurde und die andere mit den Polen des Induktoriums direkt verbunden war; ein Schema, das von Slaby zur Messung des Funkenwiderstandes benutzt wurde. Der Kondensator der Braunschen Röhre war mit der ersten Funkenstrecke verbunden und der Widerstand war so klein gewählt, daß beim Aufladen der Kapazität an demselben nur unbedeutende Spannungsschwankungen sich ausbilden konnten. Der Fleck stand ruhig in der Mitte des Schirmes, und nur in dem Moment, wo die Funkenentladung sich ausbildete, wurde der Fleck sowohl durch das Kondensatorfeld, wie auch durch den Strom abgelenkt. Es ergab sich, daß bei dieser Versuchsanordnung die Kurven dieselbe Form behielten, wie bei dem früher benutzten Kreise mit einer Funkenstrecke.

Bei kleineren Frequenzen gaben die nach der beschriebenen Methode ausgeführten Versuche ganz deutliche und bestimmte Resultate. Sobald ich aber zu den höheren Frequenzen überging, wurden die Kurvenbilder zu lichtschwach und hatten eine viel kompliziertere Gestalt, die nicht immer zu enträtseln war. Nach einigen Versuchen, bei denen die Versuchsanordnung nach verschiedenen Seiten abgeändert wurde, gelang es mir, eine Methode aufzufinden, welche erlaubte, direkt die Spannungs- sowie auch die Stromkurven zu erhalten. Parallel zu der Funkenstrecke (Fig. 3) wurde der Kreis II gelegt, der aus einer Leidener Flasche C_2 und einem großen induktionsfreien Widerstande R_2 bestand. Dieser Kreis wurde in derselben Zeit wie der Kreis I durch das Induktorium aufgeladen. In dem Moment, wo die Funkenstrecke f durch den Funken kurzgeschlossen wird, fängt auch die Kapazität C_2 an sich zu entladen und zwar des großen Wider-

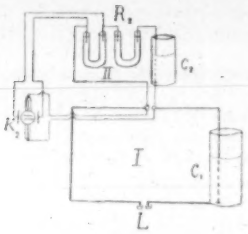


Fig. 3.

standes R_2 wegen aperiodisch. Eigentlich ist der Funke nicht als ein Leiter von konstantem Widerstande zu betrachten, und dazu ändert sich noch die Spannung in demselben periodisch, so daß sich auf die aperiodische Entladung noch periodisch wirkende Störungen lagern, aber trotzdem fällt dieser Umstand nicht sehr in Betracht, da ja die Funkenspannung bei der Entladung viel kleiner ist, als die anfängliche Spannung an der Kapazität C_2. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Kapazität C_2 entlädt, kann durch Veränderung ihrer Größe, sowie durch den Widerstand R reguliert werden. Die Spannung, welche sich bei dieser Entladung an dem Widerstande R (oder einem Teile desselben) ausbildet, kann dazu benutzt werden, um den Kathodenfleck nach der einen Seite des Schirmes abzulenken, um ihn dann wegen der Abnahme der ablenkenden Spannung mit einer bestimmten Geschwindigkeit nach seiner Ruhelage sich bewegen zu lassen. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Fleck bewegt wird, ist proportional der Entladungsgeschwindigkeit und kann in weiten Grenzen reguliert werden. Es waren zu diesem Zweck an beiden Seiten der Röhre Messingplatten angebracht, welche also einen Kondensator K_2 bildeten, der sich aber außerhalb der Röhre befand und dem Widerstande R_2 (oder einem Teile desselben) parallel geschaltet war. Es wäre vorteilhafter, auch diesen Kondensator im Innern der Röhre, anzubringen, statt außerhalb derselben, wie es bei meinen Versuchen der Fall war. Es war so auch sehr schwer, ein homogenes Feld im Innern der Röhre zu erzeugen; durch das Vorhandensein der Glaswände und die Entladungserscheinungen im Innern der Röhre wurde das Feld manchmal sehr verzerrt, was auch auf die Gestalt der Kurven eine bedeutende Wirkung hatte. Während der Fleck sich auf diese Weise von einem Rande des Schirmes zu dem anderen bewegte, wurde er in einer dazu senkrechten Richtung in Schwingungen versetzt, was durch die Funkenspannung oder den Strom der Spulen $\mathfrak{J}$ bewirkt werden konnte: auf dem Schirme erhielt man dann Spannungs- resp. Stromkurven. Es haftete ihnen allerdings der Nachteil an, daß sie mehr und mehr zusammengedrängt waren, je mehr sich der Fleck seiner Ruhelage näherte, da die Geschwindigkeit des Fleckes nicht konstant war. Durch eine entsprechende Abänderung der Konstanten des Kreises II kann aber diese Abnahme der Geschwindigkeit herabgedrückt werden. Der geschilderte Prozeß vollzieht sich bei jedem Funken in gleichartiger Weise und man erhält bei einer fortgesetzten Folge von Entladungen feststehende Kurven von großer Regelmäßigkeit auf dem Schirm, so daß sie auf photographischem Wege aufgenommen werden konnten. Dazu war eine Expositionszeit von ca. 3 Minuten nötig. Eine Verrückung des Kurvenbildes war nicht zu bemerken, wenn nur im Betriebe der Influenzmaschine oder des Induktoriums keine Änderungen eingetreten waren. Die Aufnahmen wurden mit einem lichtstarken Objektiv (Zeiß-Aplanar $^1/_4$ $F \cdot 225$ mm) gemacht; für sämtliche Aufnahmen wurden die Ilfords-Monarch- oder die Lumièreschen Σ-Platten benutzt. Es war aber immer das Übel vorhanden, daß der erwähnte helle Streifen oder der feststehende Fleck den Teil des Schirmes in ihrer Umgebung sehr stark beleuchteten und eine starke Schwärzung der Platten hervorriefen; auch waren die Platten an diesen Stellen immer überlichtet.

Die oben beschriebene Methode erlaubt den zeitlichen Verlauf von Spannung und Strom am Funken zu beobachten und somit auch die Abnahme der Schwingungsamplituden ohne weiteres zu bestimmen. Sie eignet sich also auch zur Bestimmung der Schwingungsdämpfung und ist, weil sie sich auf keinerlei Voraussetzungen über die Art der Dämpfung zu stützen braucht, anderen Untersuchungsmethoden überlegen. Auch der von Diesselhorst[1]) angegebenen, welcher versucht hat, die Schwingungskurven mittels eines rotierenden Spiegels auseinanderzulegen. Denn ihr ist einerseits durch mechanische Schwierigkeiten eine Grenze gesetzt, andererseits gestattet der in Anwendung gebrachte Glimmlicht-Oszillograph durch seine hohe erforderliche Spannung und Stromstärke nicht die Messung der Spannung am Funken. Die von mir angegebene Methode dagegen scheint nach meinen Versuchen durch keine obere Grenze der Schwingungsfrequenz beschränkt zu sein. Zwar bin ich nicht unter 100 m Wellenlänge heruntergegangen, aber bei diesen schon ziemlich bedeutenden Frequenzen war die Lichtstärke der Bilder keineswegs klein und photographische Aufnahmen waren sehr leicht zu erhalten.

1) H. Diesselhorst, Ber. d. Deutsch. Phys. Ges.

Versuchsergebnisse.

1. Verlauf der Spannung.

In meiner ersten schon erwähnten Arbeit, wie auch in der von Barkhausen, wurde angegeben, daß die Funkenspannung während der Entladung nahezu konstant ist. Weitere Versuche ergaben aber, daß diese einfachste Form der Spannungskurve nur ein Spezialfall von den viel komplizierteren Verhältnissen ist, die hier auftreten können. Dieser Fall tritt nämlich nur bei kleinen Frequenzen, d. h. bei Wellenlängen über 2000 m ein. Es wächst dann die Spannung im Moment, wo der Strom durch Null geht und sein Zeichen wechselt, schnell in die Höhe, erreicht einen Wert, der etwas größer ist wie die mittlere Spannung (unter diesem Ausdruck ist hier die Spannungsgröße in der Nähe der maximalen Stromstärke gemeint), sinkt dann ziemlich schnell auf den konstanten Mittelwert e_m und behält ihn längere Zeit (vgl. Fig. 4). Nur wenn der Strom wieder dem Null-

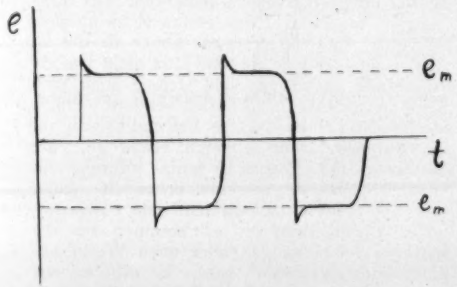


Fig. 4.

werte nahe kommt, fängt auch die Spannung an abzunehmen und wird mit der Stromstärke zugleich Null. Ein Anwachsen der Spannung und zweites Maximum in der Spannungskurve, wenn die Stromstärke sich dem Nullwerte nähert, wie es bei dem gewöhnlichen Kohlelichtbogen vorkommt, wurde hier niemals beobachtet. Die mittlere Spannung scheint bei geringer Dämpfung der Schwingungen von der Amplitude nicht abzuhängen. Bei den Charakteristiken lagern sich die Kurvenbilder der sukzessiven Schwingungen übereinander, so daß ein gerader Streifen entsteht, welcher der Stromachse parallel läuft. Doch bildet sich hier (Fig. 5) im Gebiete der kleinen Stromwerte eine deutliche Schleife, woraus zu ersehen ist, daß die Spannungskurve streng genommen nicht aus geraden Linienstücken besteht und die Spannung sich nicht sprungweise, sondern kontinuierlich ändert. Die mittlere Spannung hängt von der Periode der

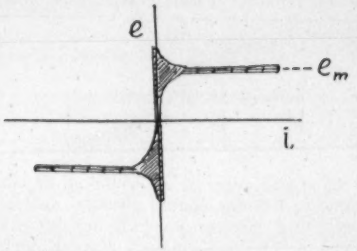


Fig. 5.

Schwingungen, Selbstinduktion und Kapazität sowie auch von der Funkenlänge, wenigstens in dem kleinen Bereich zwischen 0,5 und 2 mm, in merklicher Weise nicht ab, wie aus der folgenden Tabelle zu sehen ist.

Tabelle I.

Nr.	λ in m	C in cm	L in MH	f in mm	e in Volt
1	2100	4800	310	1,0	34
2	3400	9600	310	0,5	30
3	4300	9600	550	1,0	31
4	5300	4800	1600	0,5	32
5	7500	9600	1600	1,5	36

Es wird hier, wie auch in anderen Tabellen durch λ, C, L, f und e die Wellenlänge, resp. Kapazität, Selbstinduktion, Funkenlänge und Funkenspannung bezeichnet.

Allerdings ist bei kleineren Stromwerten die mittlere Spannung nicht von der Stromstärke unabhängig und diese Erscheinung tritt besonders deutlich bei stärkeren Dämpfungen hervor. Es wächst nämlich die Spannung e_m etwas, wenn die Stromamplitude klein wird, wie in der Fig. 6

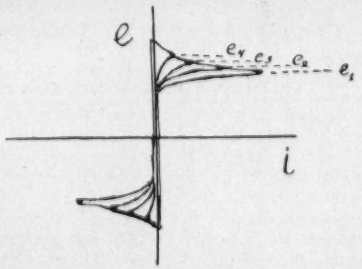


Fig. 6.

angegeben ist, was durchaus den beim gewöhnlichen Lichtbogen beobachteten Verhältnissen entspricht. Tabelle II gibt die Resultate wieder, welche bei solchen stark gedämpften Schwingungen erhalten wurden.

Tabelle II.

Nr.	f	e_1	e_2	e_3	e_4
6	0,5	41	—	—	—
7	1,0	31	35	39	43
8	1,0	31	36	43	—
9	1,5	32	35	37	—
10	2,0	39	39	39	—

Es ist hier unter e_1, e_2, e_3 und e_4 die mittlere Spannung bei der ersten, zweiten, dritten und vierten der sukzessiven Schwingungen angegeben, welche ausgemessen werden konnten. Man sieht aus dieser Tabelle, daß die Spannung bei Abnahme der Amplituden etwas wächst. Bei der kleinsten Funkenlänge ist eine Spannungserhöhung bereits bei der ersten Schwingung eingetreten, da hier schon die erste Stromamplitude sehr klein war, so daß überhaupt die Spannung nur während der ersten Schwingungsperiode ausgemessen werden konnte. Je größer die Funkenstrecke, desto konstanter wird die Spannung, da die Spannungserhöhung nur bei kleinen Stromstärken auftritt. Allerdings scheint die Spannung bei der größten Funkenlänge etwas in die Höhe gerückt, was wohl dem Einfluß der Funkenlänge zuzuschreiben ist, und hängt auch von der Amplitude nicht merklich ab.

Die Messungen, welche an den Spannungskurven vorgenommen wurden, bestätigen das oben Gesagte. Bei kleiner Funkenlänge und großer Selbstinduktion, also für kleine Stromstärke wurden bei schwachgedämpften Schwingungen folgende Zahlen erhalten:

Tabelle III.

Nr.	λ	C	L	f	e
11	4280	1200	8330	0,5	35—40
12	4280	1200	8330	0,5	34

Es ergibt sich somit für Wellenlängen über 2000 m als allgemeines Resultat, daß bei kleiner Funkenstrecke mit Zinkelektroden die Elektrodenspannung von den verschiedenen Versuchsbedingungen fast unabhängig ist und zwischen 30 und 40 Volt beträgt. Das stimmt durchaus mit der in meiner früheren Arbeit angegebenen Spannungsgröße. Höhere und niedrigere Spannungswerte kamen in meinen Versuchen gar nicht vor, wenn nur die Wellenlänge groß genug war und die Stromstärke dem Nullwert nicht zu nahe kam. Die von Barkhausen angegebenen Grenzen 15—50 Volt sind entschieden zu weit und solche Spannungsschwankungen dürften in Fällen, wo die Spannung während der Entladung konstant bleibt, gar nicht vorkommen.

Geht man zu höheren Schwingungszahlen, so erhält man andere Kurvenformen, die

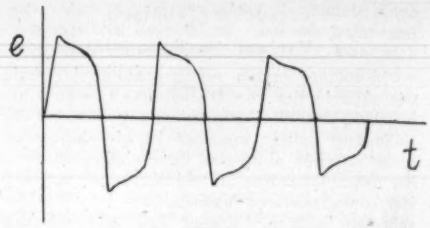


Fig. 7.

stetig ineinander übergehen. Bei Schwingungszahlen zwischen 10^5 und 10^6 erhält man solche Übergangsformen wie in Fig. 7. Die Spannung steigt nicht so schnell, wie bei den früher behandelten Fällen, erreicht einen Maximalwert und sinkt dann fortwährend, zuerst langsamer, dann immer schneller, bis sie mit dem Strom zugleich Null wird. Es gibt hier überhaupt keine Strecke, auf der eine konstante Spannung herrschte. Auch eine andere Eigentümlichkeit ist bei diesen Kurven zu bemerken. Die Spannungswerte, die bei den ersten Schwingungen auftreten, sind immer etwas höher als die bei den nachfolgenden; sie sind jetzt nicht von der Amplitude unabhängig und steigen auch nicht bei abnehmender Stromstärke, sondern nehmen, wenigstens bei den ersten Schwingungen, mit der Stromamplitude zugleich etwas ab. Der Mittelwert der Spannung kann während der ersten Schwingungsperiode erheblich größer sein, als 35 Volt, und erreicht eine Größe von 60 Volt und darüber; es kommen bei den späteren Schwingungen aber auch Werte vor, die kleiner als 30 Volt sind. Es ergeben sich daraus sehr komplizierte Verhältnisse, bei denen der Energieverbrauch in der Funkenstrecke nicht ohne weiteres berechnet werden kann. Die Form der Charakteristiken (Fig. 8) ist auch eine viel kompliziertere und ist aus den erhaltenen Kurvenbildern nicht immer deutlich abzulesen, da nur diejenigen Teile des Bildes, wo sich die Kurven übereinander lagern, ganz deutlich zum Vorschein kommen. Der Einfluß

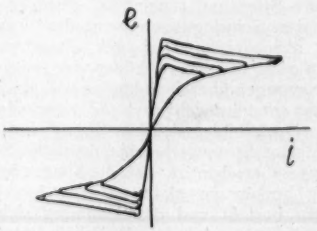


Fig. 8.

verschiedener Versuchsbedingungen auf die Spannungsgröße ist nicht mit Bestimmtheit festzustellen, da sich über diese Wirkungen immer der Einfluß der Stromamplitude lagert. Auch ist das Versuchsmaterial noch nicht ausreichend, um die quantitative Seite der Frage zu beleuchten.

Noch merkwürdiger gestalten sich die Erscheinungen bei noch höheren Schwingungszahlen, die über 10^6 hinausreichen. Die kleinste Wellenlänge, die zur Untersuchung gelangte, war ca. 100 m (Schwingungszahl ca. $3 \cdot 10^6$). Die Spannungskurven weichen noch mehr von der zuerst besprochenen Form und scheinen einer gedämpften Sinuskurve sich zu nähern (Fig. 9).

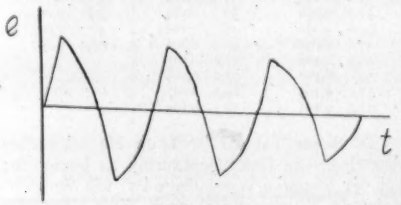


Fig. 9.

Die Kurven sind allerdings etwas asymmetrisch; die Spannung steigt etwas schneller an, als sie nachher abnimmt, und eine Ähnlichkeit mit den beschriebenen Übergangsformen ist diesen Kurven nicht abzusprechen. Doch kann jetzt von einer auch nur nahezu konstanten Spannung gar nicht mehr die Rede sein. Die Amplituden der Spannungskurven nehmen auch deutlich ab, und zwar bei den ersten Schwingungen fast genau in demselben Verhältnis, wie die der Stromkurve. Der Funkenwiderstand scheint bei diesen hohen Schwingungszahlen eine reelle Bedeutung zu gewinnen und sich einer konstanten Größe zu nähern. An den Charakteristiken zeigt sich dieses Verhalten der Funkenstrecke sehr ausgeprägt. Läßt man zuerst auf den Kathodenstrahl nur den Strom einwirken, so entsteht auf dem Schirm eine gerade Linie; schaltet man aber jetzt parallel zu der Funkenstrecke den Kondensator der Braunschen Röhre ein, so kommt noch die Spannungsablenkung hinzu, und man könnte bei dem ersten Anblick des Kurvenbildes, das jetzt entsteht, sagen, daß es auch eine gerade Linie sei, die nur um einen Winkel gegen die frühere gedreht ist, was der Charakteristik eines konstanten Widerstands entspräche. Sieht man sich diese Kurven aber genau an (vgl. Fig. 10), so findet man, daß es sich hier nur um eine Annäherung handelt, und daß die Kurven eine Ähnlichkeit mit den Übergangsformen nicht ganz verloren haben. Die Spannung steigt erst

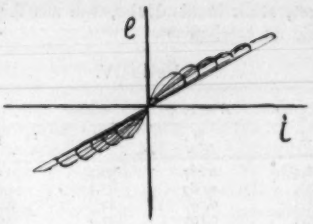


Fig. 10.

etwas schneller an und zwar desto schneller, je kleiner die Stromamplitude ist, um dann mit dem Strom fast im konstanten Verhältnis abzufallen. Ich kann noch nicht mit Bestimmtheit sagen, ob die Spannungsamplitude in den von mir untersuchten Fällen bis auf Null abnimmt, oder auch bei den kleinsten Stromwerten noch einen endlichen Wert behält. Der Schluß aber ist unabweisbar, daß hier eine bestimmte Tendenz vorliegt, nach der bei höheren Schwingungszahlen der Funkenwiderstand einem konstanten Wert zustrebt. Und dieser Wert dürfte bei Schwingungszahlen die nicht erheblich über den von mir benutzten liegen, schon erreicht werden.

2. Verlauf der Stromstärke.

Alle die Resultate, welche durch die Untersuchung der Spannungskurven und Charakteristiken gefunden wurden, werden durch die später erhaltenen Stromkurvenbilder noch bestätigt. Je nach der Geschwindigkeit, mit der der Fleck durch die aperiodische Entladung bewegt wird, können auch die Kurven mehr oder weniger ausgezogen werden. Es sind allerdings gedämpfte sinusartige Kurven, aber wegen der häufig auftretenden Verzerrung des elektrostatischen Feldes erleiden auch die Kurvenbilder manchmal eigentümliche Veränderungen Die Scheitelpunkte der Kurven können aber doch dazu benutzt werden, um die Abnahme der Stromamplituden und des Schwingungsdekrements zu bestimmen. Es ergaben sich dabei verschiedene Arten von Schwingungsdämpfungen, je nach den Frequenzen mit welchen man zu tun hat.

Bei kleineren Schwingungszahlen nehmen die Amplituden fast linear ab. Würden dabei keine anderen Energieverluste, als die durch das Vorhandensein der Funkenstrecke bedingten da sein, so müßte dieses Gesetz noch strenger befolgt werden, da in diesen Fällen die Spannung im Funken konstant bleibt. Allerdings wachsen die Dekrementwerte, wenn man sie für jede Periode einzeln aus dem Verhältnis zweier aneinander folgenden Amplituden be-

rechnet, stark in die Höhe, wie aus folgender Tabelle zu ersehen ist.

Tabelle IV.

$\lambda = 5300$	$L = 1600$	$C = 4800$	$f = 3$
A	γ	A	γ
46,5	0,087	52,2	0,076
42,5	0,089	48,5	0,078
38,8	0,092	44,7	0,084
35,3	0,103	41,0	0,082
31,8	0,116	37,7	0,086
28,3	0,114	34,5	0,082
25,3	0,113	31,7	0,092
22,6	0,122	28,9	0,101
20,0	0,128	26,1	0,113
17,6	0,141	23,3	0,119
15,3	0,163	20,7	0,140
13,0	0,187	—	—

Es sind hier die Resultate zweier Versuche wiedergegeben, welche bei nahezu gleichen Versuchsbedingungen ausgeführt waren. Unter A sind die Amplitudenwerte in willkürlichen Einheiten ausgedrückt, unter γ die entsprechenden Dekrementwerte angegeben. Das Dekrement steigt besonders schnell bei kleineren Amplituden an, bei denen die relative Abnahme derselben groß wird. Man sieht aus der Tabelle, daß man es hier mit keinem konstanten Dekrementwert zu tun hat und daß bei diesen Schwingungszahlen alle Versuchsmethoden, welche sich auf eine Annahme eines solchen Wertes stützen, unbrauchbar werden.

Bei höheren Schwingungszahlen, wo die Spannungskurve eine der Übergangsformen hat, ist auch die Amplitudenkurve stärker gekrümmt und weicht von dem geradlinigen Verlauf noch mehr ab. Das Dekrement nimmt zwar auch bei Abnahme der Amplituden bedeutend zu, aber nicht in demselben Maße, wie in der Tabelle IV. Dieses Resultat ist in der Tabelle V wiedergegeben.

Tabelle V.

$\lambda = 1400$	$C = 4800$	$L = 120$	$f = 2$		
A 82	76	70,2	64,5	59	54
γ 0,072	0,076	0,080	0,083	0,087	0,089

$\lambda = 1400$	$C = 4800$	$L = 120$	$f = 2$	
A 49,5	45	41	37	33
γ 0,092	0,094	0,101	0,105	0,105

Bei noch höheren Schwingungszahlen ist die Zunahme des Schwingungsdekrementes noch kleiner und bei der kleinsten untersuchten Wellenlänge (100 m) ist diese Zunahme nicht mehr zu konstatieren. Auch die Amplitudenkurve wird einer Exponentialkurve sehr ähnlich, und darin findet man eine Bestätigung der früher ausgesprochenen Ansicht, daß bei hinlänglich großen Schwingungszahlen der Funken als ein Leiter zu betrachten ist, der das Ohmsche Gesetz befolgt.

Die folgenden Tabellen sind aus einigen Versuchen mit Wellenlängen 170 resp. 100 m-Längen erhalten.

Tabelle VI.

$\lambda = 170$	$L = 7$	$C = 1200$	$f = 2,5$		
A	γ	A	γ	A	γ
94,5	0,096	82,5	0,095	71	0,094
85,7	0,092	78	0,097	64	0,094
78	0,097	68	0,098	58	0,094
70,7	0,098	61,5	0,101	53	0,092
64	0,093	35,5	0,104	48,2	0,089
58,2	0,096	56	0,104	44	0,094
52,8	0,098	45	0,104	40	0,092
47,8	0,097	40,5	0,106	36,4	0,097
43,5	0,108	36,4	0,107		
39	0,107	32,6	0,105		
35	0,104	29,3	0,107		
31,5	0,105	26,3	0,105		

In dieser Tabelle ist noch ein schwaches Ansteigen des Dekrementwertes zu bemerken; bei der kürzeren Wellenlänge ist, wie die nachstehende Tabelle zeigt, auch diese schwache Zunahme verschwunden.

Tabelle VII.

$\lambda = 100$	$L = 7$	$C = 400$	$f = 2-2,5$		
A	γ	A	γ	A	γ
73	0,146	61	0,141	77,5	0,130
55	0,143	53	0,142	68	0,130
41,5	0,145	46	0,140	59,7	0,125
31,0	0,148	40	0,148	52,7	0,136
23	0,149	34,5	0,150	46	0,140
17	0,135	29,7	0,145	40	0,134
13	0,137	25,7	0,147		
10	0,143	22,2	0,145		
7,5		19,2	0,145		

In der ersten Spalte der Tabelle VII sind nur Amplitudenwerte angegeben, welche durch zwei Schwingungsperioden getrennt sind; es ist aus ihnen der Mittelwert des Dekrements für je zwei Perioden berechnet.

Dieses Verhalten der Schwingungen bei verschiedenen Schwingungszahlen ist auf der Fig. 11 graphisch dargestellt. Als Abszissen sind hier relative Amplitudenwerte aufgetragen, wobei der größten Amplitude in jedem Versuch der Wert 1 beigelegt wird; die übrigen sind als Bruchteile dieser Einheit ausgedrückt. Auf der Ordinatenachse sind die entsprechenden Dekrementwerte aufgetragen.

Schlußbemerkungen:

Es scheint durch diese Versuche endgültig festgestellt zu sein, daß im allgemeinen von

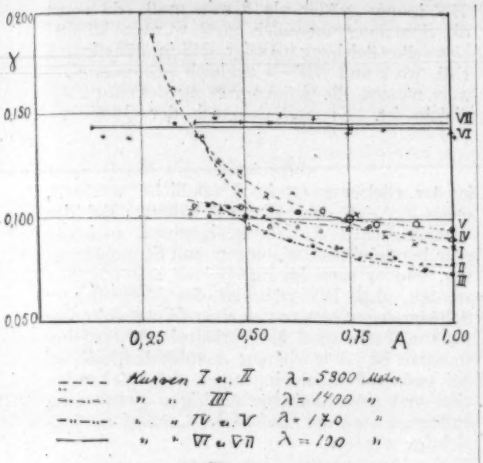


Fig. 11.

einem Funkenwiderstand nicht die Rede sein kann, wie auch von einem Widerstande des Lichtbogens schlechthin jetzt nicht mehr gesprochen werden darf. Es ist aber andrerseits die interessante Tatsache zum Vorschein gebracht, daß in speziellen Fällen, nämlich bei hohen Frequenzen, die Funkenstrecke wie ein gewöhnlicher Leiter betrachtet werden darf. Der Übergang von der dem gewöhnlichen Lichtbogen eigentümlichen Spannungskurve, wie sie auf der Fig. 4 wiedergegeben ist, zu einer gedämpften Sinuskurve vollzieht sich ziemlich schnell; bei Schwingungszahlen, die sich nur um eine Zehnerpotenz unterscheiden, können schon ganz verschiedene Verhältnisse auftreten. Von diesem Standpunkte aus muß man den gebräuchlichen Methoden, welche zur Messung der dämpfenden Wirkung des Funkens dienen, mit einigem Mißtrauen gegenübertreten, da sie nur in ganz speziellen Fällen das ergeben, was man von ihnen verlangt. Dagegen ist die von mir vorgeschlagene Methode von jedem Bedenken in dieser Hinsicht frei und läßt auch die Dämpfung der Schwingungen mit genügender Genauigkeit bestimmen.

Daß sich die gefundenen Ergebnisse mit den aus der Simonschen dynamischen Theorie des Lichtbogens gezogenen Folgerungen im Einklang befinden, werde ich in der folgenden Mitteilung zeigen.

Im übrigen bin ich damit beschäftigt, durch fortgesetzte und erweiterte Versuche weiteres Beobachtungsmaterial beizubringen.

Göttingen, Institut für Angewandte Elektrizität, Juli 1908.

(Eingegangen 23. Juli 1908.)

Zur Theorie des sogenannten Funkenwiderstands.

Von D. Roschansky.

Wie auch früher häufig angenommen wurde und wie aus der vorstehenden Mitteilung hervorgeht, ist der Funken bei einer oszillatorischen Entladung nichts anderes als ein Wechselstromlichtbogen hoher Frequenz zwischen Metallelektroden. Somit konnte man versuchen, auf die von mir untersuchten Erscheinungen die von H. Th. Simon[1]) entwickelte dynamische Theorie des Lichtbogens anzuwenden, die theoretischen Ergebnisse mit den experimentell gefundenen zu vergleichen und daraus ein Urteil zu gewinnen, inwieweit diese Theorie, die sich bisher als durchaus brauchbar erwiesen hat, auch auf dem Gebiet der gedämpften Schwingungen hoher Frequenz Anwendung finden kann.

Da das von Simon gebrauchte graphische Verfahren gerade für den Fall der gedämpften Schwingungen etwas mühsam ist, so wird hier die Theorie in analytischer Form entwickelt; zumal ihre Folgerungen dadurch an Übersichtlichkeit gewinnen.

Ich verzichte hier auf eine Begründung und Deutung der Grundannahmen, welche in der zitierten Simonschen Arbeit zu finden sind, und werde einfach voraussetzen, daß die Lichtbogenvorgänge durch einen Parameter bestimmt werden, den ich im folgendem mit S bezeichne und der dem Produkt der Temperatur T mal Fläche F des negativen Kraters in der Simonschen Theorie entspricht. Über diesen Parameter werden folgende Annahmen gemacht.

1. Für einen statischen Zustand des Lichtbogens, das heißt, für einen Gleichstromlichtbogen soll die Größe S der Leistung im Lichtbogen proportional sein. Diese Beziehung gibt uns die erste Grundgleichung

$$ei = WS, \qquad (I)$$

wo mit e und i die Spannung resp. Stromstärke bezeichnet werden und W ein hier nicht näher zu bestimmender Proportionalitätsfaktor ist. Für dynamische Zustände muß aber eine weitere Beziehung aufgestellt werden, die auch der Veränderung der Größe S Rechnung trägt. Es wird dieser Größe eine gewisse Trägheit zugeschrieben, so daß bei deren Veränderung eine gewisse Menge Energie verbraucht oder frei wird. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, muß in die Gleichung (I) noch ein Glied aufgenommen werden, das dem Differentialquotient der Größe S nach der Zeit proportional ist. Die Gleichung erhält dann die allgemeine Form

1) H. Th. Simon, diese Ztschr. **6**, 297, 1905.

$$ei = WS + L\frac{dS}{dt}, \qquad (I')$$

wo L auch als konstant angenommen wird.

2. Der momentane Widerstand des Lichtbogens, worunter ich den Quotient $\frac{e}{i}$ verstehe, soll sowohl bei statischen wie auch bei dynamischen Zuständen nur von der Größe S abhängen. Diese Annahme führt zu der zweiten Grundgleichung

$$\frac{e}{i} = \varphi(S), \qquad (II)$$

in der $\varphi(S)$ eine Funktion ist, die weiter bestimmt werden soll.

Für oder gegen diese Annahmen läßt sich von vornherein streng genommen nichts aussagen. Erst der Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen kann über ihre Gültigkeit entscheiden.

Um die Funktion $\varphi(S)$ zu bestimmen, werden wir die Gleichungen (I) und (II) auf den Gleichstromlichtbogen anwenden, für den die Beziehung zwischen Strom und Spannung durch die Ayrtonsche Formel ausgedrückt werden kann:

$$e = a + \frac{b}{i}, \qquad (1)$$

wo a und b nur von der Bogenlänge und zwar linear abhängen. Die Gleichungen (I) und (II) erhalten dann folgende Form

$$ai + b = WS \qquad (2)$$

$$\frac{ai + b}{i^2} = \varphi(S). \qquad (3)$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich $\varphi(S)$ durch Elimination der Stromstärke i bestimmen

$$\varphi(S) = \frac{a^2 WS}{(WS - b)^2}. \qquad (4)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (II) ein, so kommt man zu folgender Beziehung:

$$e = \frac{a^2 WSi}{(WS - b)^2}, \qquad (5)$$

welche besagt, daß die Spannung nicht nur von der Stromstärke, sondern auch von dem Wert des Parameters S abhängt.

Unter Benutzung der Gleichungen (I') und (5) erhält man jetzt eine Differentialgleichung, aus der S zu bestimmen ist, sobald die Stromstärke i als Funktion der Zeit bekannt ist.

$$WS + L\frac{dS}{dt} = \frac{a^2 WS}{(WS - b)^2} \cdot i^2. \qquad (6)$$

Um die Integration dieser Gleichung möglich zu machen, soll in derselben eine Vereinfachung eingeführt werden und zwar unter Berücksichtigung der von WS angenommenen Werte. Aus der Gleichung (5) ergibt sich zunächst, daß WS immer größer als b sein muß, da sonst die Spannung unendlich groß werden könnte. Denn die Gleichung (6) zeigt, daß im günstigsten Fall, wo i und $WS - b$ zugleich sich dem Nullwert nähern, die Größenordnung derselben die gleiche ist. Es muß demnach der Quotient

$$\frac{i}{(WS - b)^2}$$

in der Gleichung (5) ins Unendliche wachsen, wenn WS sich dem Werte b nähert. Bei der oszillatorischen Entladung kommen meistens sehr beträchtliche Leistungen und Stromstärken vor, und es kann im allgemeinen angenommen werden, daß WS während des Verlaufs der Schwingungen nicht unter einen Wert sinkt, der noch als sehr groß im Verhältnis zu b zu betrachten ist. Für kleinere Amplituden, wie sie bei gedämpften Schwingungen stets vorhanden sind und namentlich bei niedrigen Frequenzen auftreten, muß der Einfluß der Größe b berücksichtigt werden.

In erster Annäherung soll also angenommen werden, daß die Größe b neben WS vernachlässigt werden kann. Dann erhält die rechte Seite der Gleichung (6) eine einfache Form, welche die Integration derselben möglich macht. Setzt man nämlich $(WS)^2 = Y$, so geht die Gleichung (6) in eine lineare mit konstanten Koeffizienten über:

$$Y + \frac{L}{2W}\frac{dY}{dt} = a^2 i^2. \qquad (7)$$

Die Integration dieser Gleichung kann ausgeführt werden, wenn i als Funktion der Zeit bekannt ist. Was den periodischen Anteil der Stromfunktion anbetrifft, so kann er ohne weiteres einer einfachen harmonischen Funktion gleichgesetzt werden. Der andere aber, der die Abnahme der Schwingungsamplituden bestimmt, fällt je nach dem Verlauf der Spannung am Funken verschieden aus. Qualitativ führen aber alle hier möglichen Annahmen über das Gesetz, nach dem die Schwingungen abklingen, zu ähnlichen Resultaten, so daß wesentlich die Frage der Zweckmäßigkeit über das zu wählende Gesetz entscheidet. Am übersichtlichsten gestalten sich die Rechnungen, wenn angenommen wird, daß die Amplituden nach einem Exponentialgesetz abnehmen, was auch um so näher die Tatsachen trifft, je mehr die Energieverluste in den übrigen Teilen des Schwingungskreises die im Funken auftretenden überwiegen. Wir setzen also im folgenden

$$i = i_0 \varepsilon^{-\alpha t} \sin \omega t. \qquad (8)$$

Bei dieser Annahme erhält man für Y folgende lineare Differentialgleichung

$$Y + \frac{L}{2W}\frac{dY}{dt} = a^2 i_0^2 \varepsilon^{-2\alpha t} \cdot \sin^2 \omega t. \qquad (9)$$

Wenn $\frac{W}{L}$ nicht gleich a ist, dann ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$Y = C\varepsilon^{-\frac{2W}{L}t} + \frac{a^2 i_0^2 \varepsilon^{-2at}}{2\left(1-\frac{aL}{W}\right)}(1-\sin\psi\sin(2\omega t+\psi)) \tag{10}$$

wo ψ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{W}{L}-a}{\omega} \tag{11}$$

definiert ist.

Die Integrationskonstante C ist so zu bestimmen, daß für den Anfangszustand $Y_0 = 0$ ist. Dann kann die Lösung in folgender Form geschrieben werden

$$Y = \frac{a^2 i_0^2 \varepsilon^{-2at}}{2\left(1-\frac{aL}{W}\right)}\{1-\sin\psi\sin(2\omega t+\psi) - \cos^2\psi\,\varepsilon^{-2\operatorname{tg}\psi\cdot\omega t}\}. \tag{12}$$

Der Verlauf der Größe Y hängt von dem Winkel ψ ab, und dieser ist nach der Gleichung (11) von der Frequenz abhängig. Die Gleichung (11) kann in folgender Form geschrieben werden

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{W}{L\omega} - \frac{\gamma}{2\pi}, \tag{11'}$$

wo γ das logarithmische Dekrement der Schwingungen ist. In allen praktisch wichtigen Fällen ist γ ein Bruchteil der Einheit, so daß das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (11') im allgemeinen sehr klein gegen eins angenommen werden kann. Man sieht daraus, daß, wenn $\operatorname{tg}\psi$ selbst nicht sehr klein ist, daß dann das zweite Glied auf die Größe des Winkels ψ fast gar keinen Einfluß hat. Aus demselben Grunde ist in diesem Fall

$$\frac{\gamma\omega}{2\pi}\cdot\frac{L}{W} = \frac{aL}{W}$$

klein gegen eins. Es sei noch bemerkt, daß der Ausdruck

$$2\operatorname{tg}\psi\cdot\omega t = 4\pi\cdot\operatorname{tg}\psi\cdot\frac{t}{T},$$

der in der Gleichung (12) auftritt, in diesen Fällen schon während der ersten Schwingungen viel größer als eins wird und daß daher das letzte Glied in den Klammern des Ausdrucks (12) sehr bald verschwindend klein wird.

Nach diesen Auseinandersetzungen können wir die Lösung (12) in der folgenden Form benutzen

$$Y = (WS)^2 = \frac{a^2 i_0^2 \varepsilon^{-2at}}{2}\{1-\sin\psi\sin(2\omega t+\psi)\}. \tag{12'}$$

Setzt man den aus dieser Formel gewonnenen Ausdruck für WS in die Gleichung (5), immer noch unter Vernachlässigung der Konstante b, so wird die Spannung e durch folgende Funktion dargestellt

$$e = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sin\omega t}{\sqrt{1-\sin\psi\sin(2\omega t+\psi)}}. \tag{13}$$

Für kleinere Frequenzen nähert sich ψ seinem Grenzwert $\frac{\pi}{2}$ und $\operatorname{tg}\psi$ nimmt beträchtliche Werte an. Für den Grenzfall $\psi = \frac{\pi}{2}$, der dem statischen Zustand des Lichtbogens ($\omega = 0$) entspricht, ist

$$e = a,$$

was auch aus der Ayrtonschen Formel folgt, wenn das zweite Glied auf der rechten Seite in (1) vernachlässigt wird. Bei niedrigen Frequenzen ist also die Spannung nahezu konstant und gleich a. Es kann aber gerade in diesem Fall die Konstante b nicht ganz vernachlässigt werden, denn WS schwingt fast in Phase mit i und wird bei verschwindenden Stromstärken sehr klein. Indessen läßt sich leicht übersehen, daß dieser Fall dem statischen Zustand nahe kommt, daß also für kleine Werte von i die Spannung viel größer als a werden muß, dagegen bei größeren Werten der Stromstärke durch die Formel (13) ausgedrückt werden kann.

Nun zeigen die experimentell erhaltenen Kurven bei größeren Wellenlängen (über 2000 m), daß die Spannung während des größten Teils der Schwingungsdauer als konstant und von der Schwingungsperiode, Kapazität, Selbstinduktion und Stromstärke fast unabhängig ist, und daß sich nur im Bereich der kleinen Stromamplituden eine deutliche Abweichung der Spannungsgröße von diesem mittleren konstanten Wert e_m bemerkbar macht[1]).

Um nunmehr die theoretischen Folgerungen mit den Versuchsergebnissen zu vergleichen, sind die zugehörigen Werte der Spannung und Stromstärke aus der Formel (13) und aus der angenommenen Stromfunktion berechnet, unter der Voraussetzung, daß $\psi = 85^0$ ist und

$$\operatorname{tg}\psi = 11{,}4.$$

Aus den berechneten Werten konnte die Spannungskurve (Fig. 1) und die dynamische Cha-

1) Vgl. vorstehende Mitteilung Fig. 4 und 5.

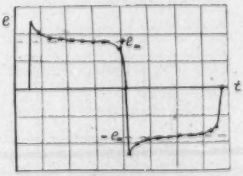


Fig. 1.

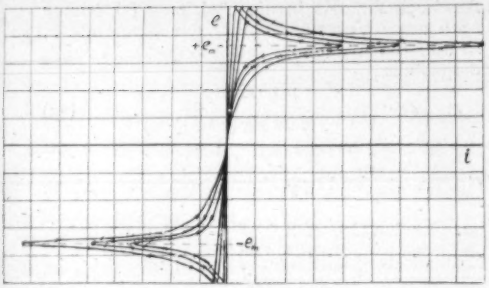


Fig. 2.

rakteristik (Fig. 2) des Funkens für den entsprechenden Fall konstruiert werden. Es zeigt sich, daß sie den beobachteten sehr ähnlich sind. Der Ausdruck (13) zeigt auch, daß der mittlere Spannungswert nur von a, d. h. von der Funkenlänge und dem Elektrodenmaterial abhängen kann.

Bei kleineren Stromstärken, deren Bereich auf den beobachteten Kurven nur bei starker Dämpfung der Schwingungen zum Vorschein kam, ist aber die Größe b gegen WS nicht mehr als verschwindend klein anzunehmen. Um deren Einfluß auf die mittlere Spannung zu übersehen, setzen wir den aus (12) gewonnenen Ausdruck für WS in die Gleichung (5). Es kann jetzt der Verlauf der Spannung e' bei kleineren Amplituden durch folgende Formel dargestellt werden:

$$e' = \frac{e}{[1 - \varepsilon^{-at}\,\Psi(t)]^2}, \qquad (14)$$

in der e durch den Ausdruck (13) ersetzt werden muß und zur Abkürzung

$$\frac{b\sqrt{2}}{a i_0 \sqrt{1 - \sin\psi \sin(2\omega t + \psi)}} = \Psi(t)$$

gesetzt ist.

Da $\Psi(t)$ eine periodische Funktion der Zeit ist, so nimmt der Nenner auf der rechten Seite der Gleichung (14), bei Abnahme der Schwingungsamplituden ab und die mittlere Spannung e'_m muß ansteigen, was auch mit den Beobachtungen im Einklang ist[1]).

Bei höheren Frequenzen muß $\operatorname{tg}\psi$ und ψ abnehmen und es ist zu erwarten, daß die Theorie hier auch Spannungskurven angibt, die den tatsächlich beobachteten nahe kommen. In den Fig. 3 u. 4 und Fig. 5 u. 6 sind zwei Arten der Kurven dargestellt. In dem einen Fall ist $\psi = 70^0$, in dem zweiten $\psi = 25^0$ angenommen.

1) Loc. cit. s. Fig. 6.

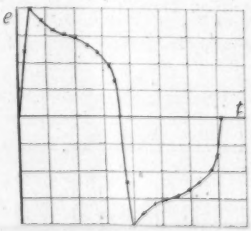


Fig. 3.

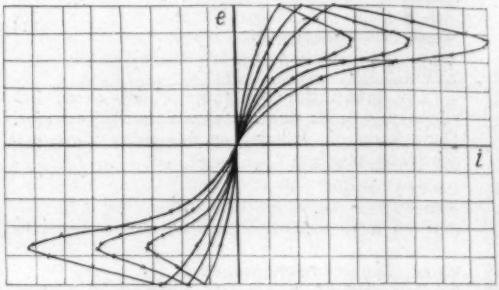


Fig. 4.

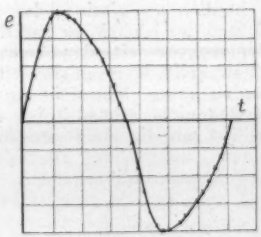


Fig. 5.

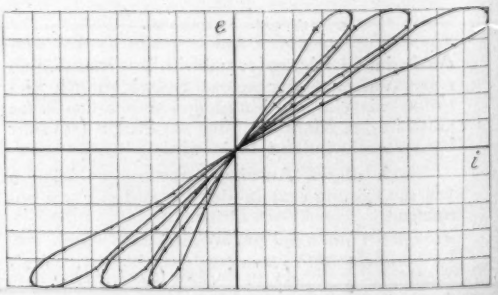


Fig. 6.

Der erste Fall soll einer Frequenz entsprechen, die ca. 4 mal so groß ist ($\operatorname{tg}\psi = 2{,}83$), wie in dem früher behandelten Beispiel; in dem zweiten Fall soll die Frequenz ca. 24 mal so groß sein ($\operatorname{tg}\psi = 0{,}467$). Würde der erste Fall einer Wellenlänge von ca. 1000 m entsprechen, so entspricht der andere einer Wellenlänge von ca. 170 m. Das sind fast genau die von mir untersuchten Frequenzen. Und wie der Vergleich mit den beobachteten Kurven[1]) zeigt, ist der Verlauf der Spannung durch die Theorie sehr genau dargestellt.

In allen diesen Fällen ist die Spannung nach (13) von der Stromamplitude unabhängig, die Spannungskurve müßte also nach der Theorie durch eine ungedämpfte Kurve dargestellt werden. Nur in dem letzten Fall ($\psi = 25^0$) ist der Ausdruck (13) während der ersten Schwingungen durch einen allgemeineren nach der Formel (12) zu ersetzen. Aber nach Verlauf der ersten 2 Perioden werden schon die Abweichungen von der Formel (12) unmerklich klein. Die Versuche ergeben aber, daß schon bei den Wellenlängen, die bei 1000 m liegen, eine deutliche Abnahme der Spannungsamplituden bei den ersten Schwingungen bemerkbar ist, und daß bei noch kleineren Wellenlängen (170 m) die Spannungsamplituden in dem ganzen beobachteten Bereich sehr merklich abnehmen. Eine solche Abhängigkeit der Spannungsgröße von der Stromamplitude ist durch die Theorie nicht erklärt, und es ist zu vermuten, daß diese Erscheinung von einem Faktor herrührt, der durch die vorliegende Theorie nicht berücksichtigt ist. In welchem Sinne dieselbe modifiziert werden muß, um auch in dieser Hinsicht mit der Erfahrung in Einklang gebracht zu werden, läßt sich zurzeit nicht ermitteln.

Dagegen führt die Theorie zu einer gedämpften Spannungskurve bei verschwindend kleinen Werten von ψ. Wir werden hier noch den Fall behandeln, wenn $\psi = 0$ ist, d. h. wenn

$$\frac{W}{L\omega} = \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Wenn $\gamma = 0{,}1$ angenommen wird, so würde dieser Fall nach der früher gefundenen Übereinstimmung ($\psi = 25^0$ und $\lambda = 170$ m) nur bei einer Wellenlänge von ca. 5—6 m auftreten.

Das allgemeine Integral der Gleichung (9) ist für diesen Fall

$$Y = \varepsilon^{-2\alpha t}\left[C + a^2 i_0^2 \alpha\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\right].$$

Nach der früher benutzten Anfangsbedingung $Y_0 = 0$ ist auch $C = 0$; und es nimmt dann die Lösung folgende Form an:

$$Y = (WS)^2 = a^2 i_0^2 \alpha \varepsilon^{-2\alpha t}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right), \quad (15)$$

woraus

$$WS = a i_0 \sqrt{\alpha}\cdot \varepsilon^{-\alpha t}\sqrt{t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}}$$

gefunden wird. Der Spannungsverlauf wird also durch die Gleichung

$$e = \frac{a}{\sqrt{\alpha}}\cdot \frac{\sin \omega t}{\sqrt{t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}}} \quad (16)$$

dargestellt, welches durch Einführung des logarithmischen Dekrements γ auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$e = a\sqrt{\frac{4\pi}{\gamma}}\cdot \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\frac{4\pi t}{T} - \sin 2\omega t}}. \quad (16')$$

Der periodische Teil der Spannungsfunktion ist in diesem Fall einfach harmonisch; der im Nenner unter dem Wurzelzeichen sich befindende Ausdruck bestimmt die Abnahme der Spannungsamplituden. Die Spannungskurve ist eine gedämpfte Sinuskurve, aber die Abnahme der Amplituden geschieht nicht nach dem Exponentialgesetz. Im Anfangszustand für $t = 0$, ist die Spannung unendlich groß, fällt aber während der ersten Halbperiode schnell ab, um dann um den Nullwert periodische Schwingungen auszuführen. Der Einfluß des periodischen Gliedes im Nenner wird bald gegenüber dem aperiodischen verschwindend klein, so daß der weitere Verlauf der Spannung durch die Formel

$$e = \frac{a}{\sqrt{\gamma}}\cdot \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\frac{t}{T}}}$$

ausgedrückt werden kann. Wenn man in diesem Fall $\frac{e}{i}$ als den Widerstand des Funkens definiert, so zeigt sich, daß diese Größe nicht konstant, sondern durch die Funktion

$$\frac{e}{i} = \frac{a}{i_0\sqrt{\gamma}}\cdot \frac{\varepsilon^{\gamma\frac{t}{T}}}{\sqrt{\frac{t}{T}}}$$

dargestellt wird. Diese Funktion hat einen Minimumwert bei $\frac{t}{T} = \frac{1}{\gamma}$, d. h. der Widerstand im Funken fällt zuerst ab, bis er gleich $\frac{a\varepsilon}{i_0}$ wird, um dann wieder anzusteigen. Es läßt sich auch beurteilen, wie die Spannung für Schwingungen verläuft, die in dem Bereich zwischen $\psi = 25$ und $\psi = 0$ liegen. Je kleiner der Winkel ψ ist, desto stärker ist die Abnahme der Spannungsamplituden bemerkbar, die zuerst nur bei

1) Loc. cit. s. Fig. 7, 8, 9 und 10.

den ersten Schwingungen auftritt und dann sich mehr und mehr auf die übrigen ausdehnt. Der periodische Anteil der Spannungsfunktion kann in diesem Bereich durch eine Sinusfunktion genügend genau dargestellt werden.

Es sei noch bemerkt, daß bei noch höheren Frequenzen, bei denen ψ negativ wird, die Veränderung des Widerstandes des Funkens, der wie oben definiert ist, in demselben Sinne stattfindet: beim Abklingen der Schwingungen nimmt der Widerstand zuerst ab, um endlich wieder schwach anzusteigen.

Wir wollen noch einige Betrachtungen anstellen über den Einfluß des Spannungsverlaufs auf die Größe des logarithmischen Dekrements der Schwingung, welches wir in der üblichen Weise aus dem Verhältnisse zweier um eine halbe Periode voneinander abstehenden Amplituden bestimmen wollen. Wir betrachten zu diesem Zweck die allgemeine Differentialgleichung der Schwingungen

$$L\frac{di}{dt}+Ri+e=V, \qquad (17)$$

wo mit L, R und V, die Selbstinduktion, resp. der Widerstand des Kreises und die Spannung an der Kapazität C bezeichnet sind; die übrigen Bezeichnungen haben denselben Sinn wie früher.

Es möge die Lösung dieser Gleichung durch folgende Funktion gegeben sein

$$i=i_0 f(t)\sin\omega(t), \qquad (18)$$

wo $f(t)$ eine gewisse abnehmende Funktion der Zeit ist. Wir multiplizieren die beiden Seiten der Gleichung (17) mit $i\,dt$ und integrieren über eine Halbperiode, die zwischen den Zeitpunkten t und t_{n+1} liegt, welche durch folgende Bedingungen definiert sind:

$$t_{n+1}-t_n=\frac{T}{2},$$

wo T eine ganze Periode ist, und

$$V(t_{n+1})=V(t_n)=0.$$

Daraus kann angenähert gefunden werden, daß

$$t_n=\frac{(2n+1)\,T}{2}$$

ist. Es ergibt sich dann, daß

$$L(i_n^2-i_{n+1}^2)=2\int_{t_n}^{t_{n+1}}(Ri^2+ei)\,dt$$

ist, wobei gesetzt wird

$$i_n=i_0 f(t_n). \qquad (18')$$

Durch leichte Umformung wird dann gefunden

$$-2\gamma_n=-ln\frac{i_n^2}{i_{n+1}^2}$$

$$=ln\left[1-\frac{2}{Li^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(Ri^2+ei)\,dt\right].$$

Wenn das logarithmische Dekrement klein im Verhältnis zu eins ist, so ist es möglich, den Logarithmus der Summe auf der rechten Seite nach den Potenzen des Integrals zu entwickeln und aus dieser Entwicklung nur das erste Glied zu behalten. Dann ist

$$\gamma_n=\frac{1}{Li_n^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(Ri^2+ei)\,dt. \qquad (19)$$

Man sieht dabei, daß das logarithmische Dekrement γ_n durch die Addition zweier Größen entsteht, von denen die eine $\gamma_{R,n}$ von dem Widerstand des Kreises und die zweite $\gamma_{e,n}$ von dem Einfluß der Funkenstrecke herrührt. Betrachten wir zuerst den ersten Anteil des Dekrements

$$\gamma_{R,n}=\frac{1}{Li_n^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}Ri^2\,dt.$$

Setzt man hier statt i und i_n ihre Ausdrücke aus (18) und (18'), so bekommt man

$$\gamma_{R,n}=\frac{Rf^2(t_n')}{Lf^2(t_n)}\cdot\int_{t_n}^{t_{n+1}}\sin^2\omega t\,dt.$$

Dabei ist der Mittelwert von $f^2(t)$ aus dem Integral herausgetragen. Da diese Funktion stetig abnimmt, so ist

$$t_n<t_n'<t_{n+1}.$$

Wenn die Dämpfung der Schwingungen nicht beträchtlich ist, so unterscheiden sich die Werte der Funktion $f(t)$ für die Argumentwerte t_n und t_n' nur unbedeutend, und man erhält den angenäherten Ausdruck für $\gamma_{R,n}$, wenn man

$$f^2(t_n')=f^2(t_n) \text{ und } T=2\pi\sqrt{LC}$$

setzt, in der bekannten Form

$$\gamma_{R,n}=\pi R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Daraus sieht man, daß bei beliebiger Art der Dämpfung der Stromschwingungen, wenn nur dieselbe nicht zu stark ist, der Anteil des Dekrements, welcher von dem konstanten Widerstand des Kreises herrührt, von der Zeit unabhängig ist.

Wir wollen annehmen, daß die Spannung als Funktion der Zeit auch als ein Produkt zweier Funktionen dargestellt werden kann, einer aperiodischen $F(t)$ und einer periodischen $p(\omega t)$, deren Periode auch gleich T sein soll. Dann ergeben dieselben Betrachtungen, wie früher folgenden Ausdruck für $\gamma_{e,n}$

$$\gamma_{e,n}=\frac{f(t_n'')\,F(t_n'')}{Li_0 f^2(t_n)}\cdot\int_{t_n}^{t_{n+1}}p(\omega t)\sin\omega t\,dt.$$

Oder, da das Integral für jede Periode denselben Wert hat, welchen wir mit A bezeichnen wollen, und da angenähert $f(t_n'') = f(t_n)$ und $F(t_n'') = F(t_n)$ gesetzt werden kann, so folgt, daß

$$\gamma_{\varepsilon,n} = \frac{AF(t_n)}{Li_0 f(t_n)}$$

ist. Es ergibt sich daraus, daß der Anteil des Dekrements, der von dem Funken herrührt, im allgemeinen nicht konstant ist. Nehmen nämlich die Spannungsamplituden schneller ab, als die Stromamplituden, so wird auch $\gamma_{\varepsilon,n}$ mit der Zeit immer kleiner werden. Im entgegengesetzten Fall muß $\gamma_{\varepsilon,n}$ mit der Zeit anwachsen. Im Spezialfall, wo die Spannungsamplituden nach demselben Gesetz abnehmen, wie die Stromamplituden, ist $\gamma_{\varepsilon,n}$ und somit auch γ_n konstant. In einem anderen Fall, wo $F(t)$ = const., wo also die Spannungskurve ungedämpft ist, muß $\gamma_{\varepsilon,n}$ nach demselben Gesetz zunehmen, nach dem die Stromamplituden abnehmen.

Aus den Messungen an den von mir erhaltenen Stromkurven[1]), ergibt sich, daß bei niedrigen Frequenzen das Dekrement mit der Zeit zunimmt, und daß diese Zunahme um so kleiner wird, je höher die Frequenz der Schwingungen ist. Es läßt sich daraus auch der Schluß ziehen, daß in dem von mir untersuchten Wellenbereich, die Spannungskurve von einer ungedämpften periodischen in eine gedämpfte übergeht.

Was den Funkenwiderstand anbetrifft, wie man ihn auch definieren mag, so lassen sich für ihn einfache Gesetzmäßigkeiten nur dann ermitteln, wenn die verschiedenen Versuchsbedingungen und Konstanten des Schwingungskreises so variiert werden, daß dabei die Frequenz der Schwingungen ungeändert bleibt. Denn wie meine Versuchsergebnisse und die entwickelte Theorie voraussehen lassen, ist die Abhängigkeit des Funkenwiderstandes von der Frequenz der Schwingungen die komplizierteste von allen anderen Beziehungen, die bisher auf experimentellem Wege untersucht wurden. Es ließen sich daher bisher auch keine einfachen Gesetzmäßigkeiten aufstellen, da der Einfluß der Frequenz stets unberücksichtigt blieb.

Zusammenfassung.

1. Die Anwendung der Simonschen dynamischen Lichtbogentheorie auf die oszillatorische Funkenentladung erlaubt den Spannungsverlauf im Funken theoretisch abzuleiten. Ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen zeigt eine überaus befriedigende Übereinstimmung der theoretisch abgeleiteten Form der Spannungskurve mit der experimentell gefundenen, wie auch ihrer Abhängigkeit von der Frequenz.

2. Dagegen wird die Abnahme der Spannungsamplituden bei höheren Frequenzen von der Theorie zwar vorausgesehen, sie findet aber in Wirklichkeit schon bei tieferen Frequenzen statt, als es von der Theorie verlangt wird.

3. Die Zunahme des Dekrements bei niedrigen Frequenzen und die Konstanz desselben bei den höchsten von mir untersuchten ($\lambda = 100$ m) bestätigt, daß bei niedrigen Frequenzen die Spannung von der Stromamplitude unabhängig ist, und daß bei Steigerung der Frequenz die Dämpfung in der Spannungskurve immer mehr ausgeprägt wird.

Göttingen, Institut für angewandte Elektrizität.

(Eingegangen 3. August 1908.)

1) Loc. cit. s. Fig. 11.

Zur Theorie der Dispersion.

Von L. Mandelstam.

Ein Ergebnis der Dispersionstheorie des Herrn Planck habe ich bestritten und es hat deswegen in dieser Zeitschrift eine Diskussion zwischen Herrn Planck und mir stattgefunden[1]). Es handelt sich dabei, wie ich nochmals hervorheben will, nicht um die rechnerische Korrektion eines unwesentlichen Punktes, sondern um die prinzipielle Frage, ob unter den über das Medium gemachten Voraussetzungen eine Zerstreuung der Strahlung, welche wie eine Extinktion in Erscheinung tritt, entstehen kann. Ich erlaube mir deswegen noch einmal das Wort zu ergreifen. Das wesentliche Resultat der Theorie des Herrn Planck läßt sich wie folgt aussprechen[2]): Geht eine Lichtwelle durch ein optisch homogenes Medium hindurch, so wird ein Teil der Energie von den elementaren Resonatoren zerstreut. Die zerstreute Energie ist gleich der Summe der Energien, welche jeder Resonator nach Maßgabe seiner Schwingung durch Strahlung emittieren würde, falls er sich allein im Felde befände. Dadurch entsteht eine Extinktion, die man als Absorption deuten kann.

Die optische Homogenität ist von Herrn Planck vorausgesetzt[3]). Gleichzeitig ist vorausgesetzt, daß die Dimensionen der Resonatoren verschwindend klein gegen ihre Entfernungen sind[4]).

Mathematisch ist diese Extinktion bedingt

1) L. Mandelstam, diese Zeitschr. **8**, 608, 1907 und **9**, 308, 1908; M. Planck, diese Zeitschr. **8**, 906, 1907 und **9**, 354, 1908.

2) M. Planck, Sitzungsber. der Königl. Preuß. Akademie der Wissensch. **22**, 746, 1904.

3) M. Planck, Sitzungsber. der Königl. Preuß. Akademie der Wissensch. **22**, 479, 1902.

4) M. Planck, daselbst, S. 482.

durch das Auftreten des Gliedes $\frac{2}{3c^3}\frac{d^3p}{dt^3}$ in der Schwingungsgleichung eines elektromagnetischen Resonators, welcher unter dem Einflusse eines äußern Feldes steht.

Die Diskussion betrifft nun die Frage: steht dieses Glied zu Recht in der Gleichung oder nicht.

Ich habe gezeigt[1]), daß das Glied $\frac{2}{3c^3}\frac{d^3p}{dt^3}$ nur durch ein Versehen bei Herrn Planck hereinkommt und bei richtiger Rechnung herausfällt. Es sei nochmals ausdrücklich betont, daß die Rechnungen des Herrn Planck und die meinigen denselben Grad der Genauigkeit, nämlich bis zu der Größenordnung der Glieder mit $\dddot{p}$ beanspruchen. Das heißt also: bei der von Herrn Planck und mir angestrebten Genauigkeit ist das Resultat des Herrn Planck unrichtig. Seine Theorie gibt keine Extinktion der von ihm behaupteten Größenordnung.

Herr Planck hat nun erwidert, seine Gleichung sei trotz meines Einwandes richtig, man müsse nur berücksichtigen, daß verschiedene Resonatoren auch verschiedene — in der Phase verschobene — Momente besitzen. D. h. also: das verschwundene Glied $\frac{2}{3c^3}\frac{d^3p}{dt^3}$ trete dann wieder in der Gleichung auf. Herr Planck hat seine Rechnungsweise nur angedeutet[2]). So wie ich die Andeutung verstanden habe, habe ich die Rechnung durchgeführt, bin aber dabei wieder zu meinem Resultat und nicht zu dem des Herrn Planck gelangt, wie ich es auch in der Fußnote zu meinem zweiten Aufsatze mitgeteilt habe[3]).

Unabhängig von dieser Rechnungsweise wird der Einwand des Herrn Planck dadurch widerlegt, daß man die von dem fraglichen Gliede freie Schwingungsgleichung des Resonators, wie ich in meiner zweiten Mitteilung gezeigt habe, in einer Form ableiten kann, aus der hervorgeht, daß die Momente der übrigen Resonatoren überhaupt nicht in Frage kommen.

Gegenüber diesem Sachverhalt ist mir die Kritik des Herrn Planck: „Leider hat Herr Mandelstam es aber unterlassen, auf eine Besprechung dieses Einwandes einzugehen;" und weiter: „statt auf den Inhalt meines Einwandes einzugehen, wählt Herr Mandelstam nunmehr eine andere Darstellung, welche er für physikalisch natürlicher hält . . . usw." nicht verständlich. Ich bin allerdings auf den Inhalt des Einwandes des Herrn Planck eingegangen, nur habe ich, wie schon oben bemerkt, nicht die von ihm angedeutete Rechnungsart befolgt, sondern eine andere Darstellung gewählt, von der ich sagte[1]), daß sie „zugleich den Einwand des Herrn Planck widerlegt: mein Resultat käme nur zustande infolge des Nichtbeachtens des Umstandes, daß die einzelnen Resonatoren ungleiche Momente besitzen."

Es würde zur Klärung der Sache wesentlich beitragen, wenn Herr Planck den Fehler in meinen Rechnungen aufdecken wollte, ähnlich wie ich es mir mit seiner Rechnung gestattet habe.

Wenn ferner Herr Planck sagt: „Denn das Moment p ist Funktion des Argumentes $t-\frac{x}{q}$, wobei x die Wellennormale, q die Phasengeschwindigkeit bedeutet, während Herr Mandelstam in seiner Rechnung das Moment p so behandelt, als ob es von t allein abhinge", so ist der zweite Teil dieses Satzes gerade durch den in meinem Aufsatze enthaltenen Beweis — solange er nicht als irrtümlich erwiesen ist — widerlegt. Ich habe dieses dort ausdrücklich betont, indem ich sagte: „Das wesentliche Resultat der ganzen Betrachtung liegt bereits in der Form der Gleichung (9). Aus ihr folgt daß in der Verknüpfungsgleichung zwischen p und E das Glied $\frac{2}{3c^3}\frac{d^3p}{dt^3}$, welches bei Herrn Planck die Extinktion bedingt, herausfällt und zwar unabhängig davon, ob die andern Resonatoren dasselbe Moment haben oder nicht."

Wenn anderseits Herr Planck angibt, daß er seine Gleichung jetzt doch wieder erhält, so kann ich nur annehmen, daß seine Ableitung nunmehr auf einer veränderten Grundlage beruht. Ob diese Vermutung zutrifft, läßt sich natürlich nur beurteilen, wenn Herr Planck seine Ableitung mitgeteilt hat.

1) L. Mandelstam, l. c. **8**, 608 ff.; **9**, 308 ff.
2) M. Planck, l. c. **8**, 906.
3) L. Mandelstam, l. c. **9**, 309, Fußnote.

1) l. c. S. 308.

Straßburg i. E., Phys. Institut.

(Eingegangen 8. August 1908.)

Verbesserungen am Saitenelektrometer.

Von C. W. Lutz.

Das von mir in dieser Ztschr. **9**, 100, 1908 beschriebene Saitenelektrometer hat sich seither durchaus bewährt. Es ist, soviel ich sehe, das einzige genügend empfindliche Elektrometer, das sich auch auf dem Schiffe und im Luftballon verwenden läßt wegen seiner geringen Empfindlichkeit gegen Neigungen. Der Verfolg verschiedener luftelektrischer Probleme läßt es wünschenswert erscheinen, etwa auf hoher See auch noch bei ziemlich starkem Winde Messungen durchführen zu können. Bei der seit-

herigen Konstruktion zeigte sich, daß der Wind durch die Öffnungen für die seitlichen Zuleitungssonden (S_l und S_r der erwähnten Abhandlung) eindrang und die Saite in fortwährender Bewegung erhielt. Diese Öffnungen einfach durch zwei weitere Isolatoren zu verschließen, wollte ich vermeiden, um nicht die Stellen möglichen Isolationsmangels noch zu vermehren. Außerdem würden damit zwei neue Trockenvorrichtungen notwendig werden, wodurch die an sich einfache Konstruktion des Saitenelektrometers komplizierter werden würde. Aus diesen Gründen wurde den seitlichen Zuleitungssonden die

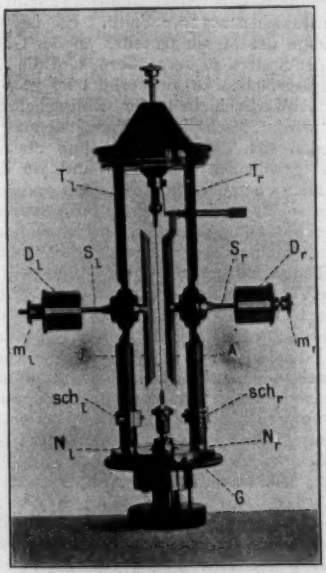


Fig. 1.

aus Fig. 1 ersichtliche Form gegeben. Links und rechts sind dem Gehäuse zwei kurze Rohrstutzen r_r und r_l aufgesetzt (Fig. 2), durch welche hindurch die beiden Sonden S_r und S_l (Fig. 1) zentrisch geführt sind; sie sind in die beiden Schneiden A und J eingeschraubt. Die Sonden selbst tragen ein langes Gewinde, auf welchem sich die beiden Deckel D_r und D_l, sowie die kleinen Muttern m_r und m_l verschrauben lassen. Die Deckel D_r und D_l umfassen Rohrstutzen am Gehäuse ohne sie zu berühren. Werden sie bis zum Anliegen an dieselben herangeschraubt, so sind die seitlichen Öffnungen im Gehäuse luftdicht verschlossen, die beiden Schneiden J und A geerdet (bei „Influenzschaltung", oder wenn das Elektrometer nicht gebraucht wird).

Beim Gebrauch des Instrumentes werden die Deckel etwas zurückgeschraubt, so daß zwischen ihnen und dem Gehäuse nur ein schmaler ca. $^1/_2$ mm breiter Schlitz bleibt. In dieser Lage sind die Sonden vom Gehäuse isoliert (bei „Doppelschaltung" und „Differentialschaltung"). Um (bei „Saitenschaltung") die beiden Schneiden auf entgegengesetzt gleiches Hilfspotential zu laden, können mittels der kleinen Muttern m_r und m_l zwei Zuleitungsdrähte an den Sonden festgeklemmt werden. Jede Sonde läßt sich leicht abschrauben (beim Auseinandernehmen

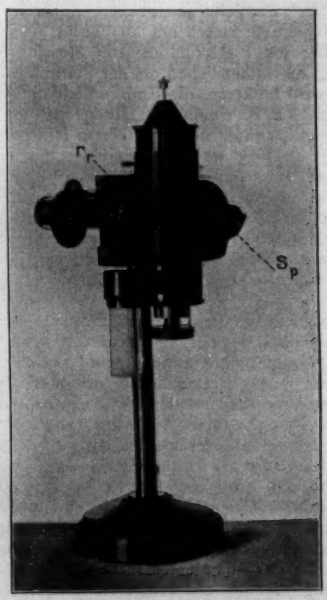


Fig. 2.

des Instrumentes), indem man Deckel und zugehörige Mutter aneinander schraubt und nun mit beiden zusammen die Sonde herausschraubt.

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, kann jetzt ein Luftstoß nur auf großen Umwegen ins Innere des Gehäuses gelangen. Er kommt dort so abgeschwächt an, daß nur ein starker Wind die Saite zeitweilig in eine kurze Vibration versetzt, die aber bei der Ablesung nicht stört.

Durch die Öffnung am Kopfe des Instrumentes vermag der Wind, wie man sich leicht durch völliges Verschließen der Deckel D_r und D_l überzeugen kann, überhaupt nicht in einem Maße einzudringen, um die Saite zu bewegen.

Bei Ballonbeobachtungen ist damit zu rechnen, daß das Instrument raschen und sehr starken Temperaturwechseln unterworfen wird, ohne daß die Möglichkeit einer schnellen Empfindlichkeitskontrolle gegeben ist. Bei Abkühlung des Elektrometers wuchs seither die Empfindlichkeit, bei Erwärmung nahm sie ab. Dieses Verhalten wird sogleich erklärlich, wenn man die Zusammensetzung des Elektrometers genauer betrachtet. Grund- und Deckplatte desselben, zwischen welchen die Platinsaite ausgespannt ist, werden durch zwei Messingstützen miteinander verbunden. Da nun Messing einen ungefähr doppelt so großen linearen Ausdehnungskoeffizienten hat als Platin, so müssen sich bei jeder Abkühlung die Messingstützen stärker zusammenziehen als der Platinfaden; die Saite wird lockerer, die Empfindlichkeit wächst. So wurde z. B. einmal in „Saitenschaltung" bei mäßig gespannter Saite und einem Hilfspotential von $\pm$ 40 Volt an den Schneiden für ein an die Saite angelegtes Potential von 6 Volt bei 15,2° ein Saitenausschlag von 6,7 Okular-Teilen, bei 4,0° für dasselbe Potential aber ein solcher von 7,8 Okular-Teilen gemessen.

Nach verschiedenen Versuchen gelang es mir, durch eine verstellbare Temperaturkompensation auch diesen Einfluß der Temperatur auf die Empfindlichkeit des Elektrometers zu beseitigen. Die hierfür getroffene Einrichtung ist folgende: Die Messingträger T_r und T_l sind in ihrer oberen Hälfte massiv, in ihrer unteren dagegen als der Länge nach geschlitzte dünne Messingrohre ausgeführt. In diesen Rohren stecken zwei an der Grundplatte G befestigte Nickelstahlstangen N_r und N_l. Sowohl zwischen den oberen Enden dieser Stangen und dem Boden der Messingrohre, als auch zwischen den unteren Enden letzterer und der Grundplatte besteht ein Spielraum von einigen Millimetern (siehe Fig. 1), damit selbst bei stärkster Ausdehnung niemals ein Anstemmen der Nickelstahlstangen bzw. Messingrohre an ihren Enden eintreten kann. Zwei Rohrschellen sch_r und sch_l stellen nach festem Anziehen ihrer beiden Schrauben eine sichere Verbindung zwischen den Rohren und Stangen her, so daß die aus zwei Teilen zusammengesetzten Träger T_r und T_l wie massive Stützen wirken und Grund- und Deckplatte in bestimmtem gegenseitigen Abstand unverrückbar voneinander halten. Je nachdem nun die beiden Rohrschellen näher an den seitlichen Zuleitungssonden oder näher an der Grundplatte eingestellt werden, kommt ein größeres oder kleineres Stück der Nickelstahlstangen mit verschwindend kleinem Ausdehnungskoeffizienten zur Wirkung. Es läßt sich so leicht eine ganz bestimmte Stellung der Klemmringe finden, bei welcher die aus Nickelstahl und Messing zusammengesetzten Träger bei Temperaturänderungen genau dieselben Längenänderungen erfahren wie die Platinsaite. Ist dies nicht der Fall, so werden die beiden Klemmringe verstellt, ohne daß dabei die Saite aus dem Instrumente entfernt zu werden braucht. Zu dem Zwecke wird zuerst die Schraube des einen Ringes gelockert, der Ring verschoben und wieder festgeklemmt, hierauf in derselben Weise der zweite Ring um das gleiche Stück verstellt. Dabei ist zu beachten: Nimmt die Empfindlichkeit des Instrumentes bei Abkühlung ab, so sind die Klemmringe nach abwärts zu verschieben und umgekehrt. Das Abnehmen der Ausschläge bei Abkühlung besagt nämlich, daß sich die Messing-Nickelstahlträger schwächer zusammenziehen als die Saite. Es ist daher die Länge des Messinganteiles an der Gesamtlänge der Stützen zu vergrößern, und die Länge der Nickelstahlstücke zu verkürzen, was eben durch Abwärtsschieben der Rohrschellen erreicht wird. Nach jeder Neueinstellung der Ringe hat sich die Saitenspannung etwas geändert (gewöhnlich gelockert) und ist daher, wenn an vorhergehende Messungen angeknüpft werden soll, neu zu regulieren. Ist einmal die richtige Einstellung der Klemmringe gefunden, so ist damit das Elektrometer für alle Zeit von einer Temperaturbeeinflussung befreit und eine weitere Verschiebung der Ringe nicht mehr nötig.

Ich habe bei meinem Instrumente durch schrittweise Verrückung der Rohrschellen erreicht, daß selbst die größte in gegenwärtiger Jahreszeit zu erlangende Temperaturdifferenz von 25° C nicht mehr den geringsten Einfluß auf die Empfindlichkeit des Elektrometers ausübt. Messungen wurden für die empfindlichste Schaltung des Instrumentes („Saitenschaltung") angestellt, nacheinander bei Temperaturen von 16,0°, 18,0°, 26,9°, 20,6°, 41,3°, 41,9°, 23,2°, 21,2°, 23,8°, 25,0° und 26,0° C. Für jede dieser Temperaturen wurde eine vollständige Eichung des Elektrometers von 0,05 bis 6,0 Volt vorgenommen. In allen Fällen ergab sich dieselbe Eichkurve (Gerade).

Schließlich sei noch erwähnt, daß durch Anbringung eines verstellbaren Beleuchtungsspiegels S_b die Schärfe der Ablesung noch erhöht wurde.

Die Firma Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn hat mich auch wieder bei der Ausarbeitung dieser Verbesserungen auf das wirksamste unterstützt und bringt dieselben jetzt bei allen Saitenelektrometern, auch bei den bereits bestellten, an.

Erdmagnetisches Observatorium (Sternwarte) München, Juni 1908.

(Eingegangen 3. August 1908.)

Die Kristallisation des unterkühlten Wassers.

Von Boris Weinberg.

Um die Erscheinung der Unterkühlung des Wassers zu demonstrieren und um eine möglichst freie Bildung der Kristalle hervorzurufen, versuchte ich in das unterkühlte Wasser ein Stückchen Eis in einem eng ausgezogenen Rohr hineinzubringen.

Dieser Versuch wurde zum ersten Male von Herrn Michael Iwanow ausgeführt und gab unerwartete Resultate: als die Kristallisation bis zur Spitze des Rohrs vorgeschritten war, begann sich an dieser Spitze ein Kristall von der Form eines sechsstrahligen Sterns zu bilden, welcher den charakteristischen Schneekristallen sehr ähnlich war.

Je niedriger die Temperatur des unterkühlten Wassers war, um so größer war die Menge der Verzweigungen und die Kristallisationsgeschwindigkeit. Bei kleiner Unterkühlung (von $-0{,}3^0$ bis -1^0) entstanden kleine Sterne (Fig. 1)

Fig. 1. (Vergr. 3 × 1.)

mit wenigen und schmalen Verzweigungen. Etwas größere Unterkühlung (von -1^0 bis -3^0) rief Sterne mit einer solchen Entwicklung der Verzweigungen hervor, daß dieselben (Fig. 2) sechseckigen Tafeln ähnlich waren. Die Fläche des Sterns enthält die Richtung des Rohrendes und, wenn dieses Ende vertikal war, bekam ich bei hinreichender Unterkühlung Tafeln, welche das Gefäß in zwei Abteilungen wie eine Scheidewand teilten. Bei Unterkühlungen über -3^0 — besonders in den Fällen, wo das Ende des Rohrs ziemlich breit (2—3 mm) war — entstanden mehrere Tafeln in verschiedenen Azimuten, die ganze Masse nahm endlich eine breiartige Gestalt an und war dem „Grundeis" ähnlich.

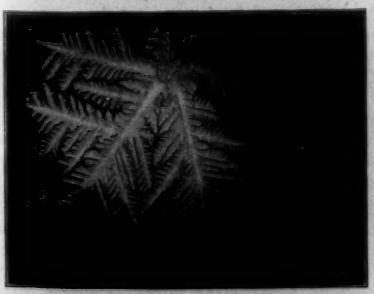


Fig. 2. (Vergr. 2 × 1.)

Die Kristalle stellen oft eine Zusammenwachsung von mehreren Sternen dar, bei welchen die Flächen, die Hauptstrahlen und sogar die Verzweigungen von höheren Ordnungen parallel sind (Fig. 3).

Als ein Stern im Innern des Wassers zerbrach, stiegen die Stücke in horizontaler Lage

Fig. 3. (Vergr. 3 × 1.)

unter kleinen Schwankungen bis an die Oberfläche des Wassers auf. Durch diesen Umstand erklärt sich die Vertikalität der optischen Achse beim See- und Flußeis.

Die Entwicklung von solchen künstlichen Schneekristallen kann leicht projiziert werden. Man stelle dafür das Gefäß (ein Becherglas, Reagenzglas, eine Abdampfschale oder dgl.) mit unterkühltem Wasser in ein anderes Gefäß mit planparallelen Wänden, worin Wasser von etwas höherer Temperatur als die Tautemperatur der umgebenden Luft enthalten ist. Unterkühlt werden kann jedes Wasser (destilliertes oder aus Wasserleitung), aber die Kältemischung (am besten — gehacktes Eis übergossen mit einer starken *NaCl*-Lösung) soll nicht zu kalt sein (von -4^0 bis -6^0) und muß niedriger stehen, als der Wasserspiegel in dem Gefäß, in welchem man das Wasser unterkühlen will.

Die Projektion ist besonders glänzend, wenn

das Gefäß zwischen gekreuzten Nicols aufgestellt ist (die obigen Aufnahmen sind in dieser Weise gemacht): auf einem dunklen Grund wächst ein Stern, welcher allmählich weißer und weißer wird und endlich — bei einer genügenden Verdickung (die Dicke ist von der Ordnung eines Zehntelmillimeters) — die Farben der chromatischen Polarisation annimmt. Man kann hierbei zeigen, daß der Kristall optisch einachsig ist: wenn man das Rohr so weit um die Achse dreht, daß die Sternfläche sich senkrecht zu den Lichtstrahlen stellt, verschwindet das Sternbild.

Genaue Messungen dieser Kristalle sind im Winter zu machen, wo eine längere Existenz derselben möglich ist. Die Dimensionen eines Sterns — bei hinreichender Unterkühlung, von -2^0 z. B. — hängen hauptsächlich von den Dimensionen des Gefäßes ab; ich habe häufig einzelne Sterne von 8—12 cm Breite gehabt.

St. Petersburg.

(Eingegangen 30. Juli 1908.)

Über die Bestimmung von Kondensatorschwingungen bei beliebig enger induktiver Koppelung [1]).

(Antwort auf die Bemerkung des Herrn Max Wien zu meiner Arbeit.)

Von B. Macků.

Herr Max Wien schreibt in seiner Bemerkung: „Aus seinen" (meinen) „Ausführungen geht nicht deutlich hervor, daß sein Ergebnis bezüglich der Rückwirkung im wesentlichen mit dem meinigen übereinstimmt und sich davon nur infolge einer etwas abweichenden Problemstellung und der Art der eingeführten Vernachlässigungen unterscheidet". Dazu muß ich hinzufügen, daß in Grenzen der von Herrn Max Wien gemachten Voraussetzungen sich seine Resultate auf meine nicht überführen lassen.

Die erste, von Herrn Max Wien angegebene Formel wurde unter der Voraussetzung [2])

$$|\delta_{01} - \delta_{02}| > k\nu \text{ d. h. } |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}| > 2\pi k$$

abgeleitet, um sie aber auf die meinige überführen zu können, mußte er eine neue Beschränkung machen, nämlich daß:

$$\frac{AB}{\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02}} = \frac{(\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2}{4\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02}} \left| \frac{4\pi^2 k^2}{4\pi^2 x^2 + (\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2} \right|^2$$

gegen 1 verschwindet [3]). Dieses ist aber unter der oberen Voraussetzung nur dann möglich, wenn

$$\frac{(\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2}{4\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02}} \leqq 1$$

oder wenn $\mathfrak{d}_{01}$ und $\mathfrak{d}_{02}$ sich voneinander nicht wesentlich unterscheiden.

Dadurch ist aber die Überführbarkeit der ersten Formel auf die meinige, und somit auch ihre Gültigkeitsgrenzen sehr begrenzt. Denn es ist selbstverständlich, daß außerhalb der Grenzen, wo sich die Formel auf meine strengere nicht überführen läßt, auch ihre Gültigkeit innerhalb der vorausgesetzten Genauigkeit aufhört. Der Grund dafür, daß außerhalb der Beschränkung $(4\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02} < (\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2)$ die Formel schlechtere Resultate gibt, liegt darin, daß im ersten Faktor

$$(4\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02} + A) = (4\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02} + 4(\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2 B)$$

die Korrektion jetzt eine große Rolle, ja sogar die Hauptrolle spielen kann.

Die zweite, von Herrn Max Wien angegebene Formel soll unter der Voraussetzung $2\pi k > |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|$ gelten (wörtlich schreibt er: „Wir erhalten also als Resultat, daß, wenn die Differenz der Dämpfungen so klein ist, daß die Koppelung vorherrscht — $2\pi k > |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|$ — ebenfalls eine Verflachung der Resonanzkurven eintritt und man statt $\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}$ aus der Kurve

$$\sqrt{(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})^2 + 4\pi^2 k^2}$$

erhält". [L. c., S. 634.])

Um diesen Ausdruck auf meine Formel überführen zu können, muß man aber wieder eine neue Beschränkung einführen, nämlich daß

$$\left(\frac{\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}}{\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}}\right)^2$$

gegen 1 klein ist, was sich mit der oberen Voraussetzung nicht deckt.

[Da bei dem gerechneten Beispiele die Erfüllung der Voraussetzung $2\pi k > |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|$ als Grund für die Zulässigkeit der betreffenden Formel angegeben ist (und nicht der wahre Grund, daß nämlich $(\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2$ klein gegen $(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})^2$ oder, wie ich geschrieben habe, daß $\sqrt{1 + \frac{\pi^2 k^2}{(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})^2}} = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 k^2}{\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02}}}$), habe ich die Übereinstimmung als zufällig angesehen.]

Es lassen sich also die von Herrn Max Wien gewonnenen Resultate auf das meinige überführen, aber die Überführung zeigt auch, daß die von ihm angegebenen Ausdrücke beschränktere Gültigkeit besitzen als er angibt. Und der Unterschied zwischen unseren Resultaten ist somit mehr in weit größerer Allgemeinheit des meinigen als in etwas abweichen-

1) M. Wien, diese Zeitschr. **9**, 537, 1908; B. Macků, diese Zeitschr. **9**, 437, 1908.

2) M. Wien, Ann. d. Phys. **25**, 625, 1908, § 4.

3) Die von Herrn Max Wien angegebenen Beispiele erfüllen diese Bedingung nicht.

der Problemstellung[1]) und der Art der angeführten Vernachlässigungen zu suchen.

Auch auf dem von Herrn Max Wien eingeschlagenen indirekten Wege kann man zu demselben Ausdrucke kommen, welchen ich berechnet habe, wenn man folgendermaßen das Problem behandelt.

Man geht von der, von Herrn Max Wien angegebenen Gleichung[2])

$$y^3 + 2ay + (a^2 - 4c)y - b^2 = 0$$

aus, wo bedeutet

$$a = 2\left\{\nu_{01}^2 + \nu_{01}(\nu_{01} - \nu_{02}) + \frac{(\nu_{01} - \nu_{02})^2}{2} - \frac{(\delta_{01} - \delta_{02})^2}{2}\right.$$

$$a^2 - 4c = 4\nu_{01}^2\{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 - (\delta_{01} - \delta_{02})^2 + k^2\nu_{10}^2\}$$

$$b = -2(\delta_{01} - \delta_{02})(\nu_{01} - \nu_{02})\nu_{01}.$$

Bezeichnet man die negativen Wurzeln der Gleichung mit y_1 und y_2, die positive mit y_3, dann ist

$$+i\nu_1 - \delta_1 = -\frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{2} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{y_1} - \frac{1}{2}\sqrt{y_2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{y_3},$$

$$+i\nu_2 - \delta_2 = -\frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{2} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{y_1} + \frac{1}{2}\sqrt{y_2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{y_3}.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor:

$$\nu_1 - \nu_2 = i\sqrt{y_2},$$
$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_{01} + \delta_{02},$$
$$4\delta_1\delta_2 = (\delta_{01} + \delta_{02})^2 - y_3.$$

Für die Wurzel y_1 wurde von Herrn Max Wien gefunden:

$$y_1 = -2a + \frac{a^2 - 4c}{2a}.$$

Setzt man die gefundenen Werte in

$$\mathcal{J}_{\text{eff}}^2 = \frac{C}{4\delta_1\delta_2\{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2\}},$$

so bekommt man:

$$\mathcal{J}_{\text{eff}}^2 = \frac{C}{(\delta_{01} + \delta_{02})^4 - (y_2 + y_3)(\delta_{01} + \delta_{02})^2 + y_2 y_3}.$$

Aus den Koeffizienten der Gleichung für y mit Hilfe der bekannten Wurzel y_1 erhält man:

$$y_2 + y_3 = -\frac{a_2 - 4c}{2a},$$

$$-y_2 y_3 = -\frac{b^2}{y_1} = \frac{b^2}{2a}.$$

Setzt man diese Werte in den oberen Ausdruck ein und benützt die angegebenen Relationen für a, $a^2 - 4c$, b, wobei man für $a = 2\nu_{01}^2$ setzt (die zwei letzten Glieder sind der Kleinheit wegen zu vernachlässigen, das zweite, das eine Asymmetrie der Resonanzkurve bedeutet, wird durch die Rechnung aus den Breiten der Kurve aufgehoben), dann resultiert:

$$\mathcal{J}_{\text{eff}}^2 = \frac{C}{4\delta_{01}\delta_{02}\left\{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} + \delta_{02})^2\left(1 + \frac{k^2\nu_{01}^2}{4\delta_{01}\delta_{02}}\right)\right\}}.$$

Brünn, Physik. Inst. d. Böhm. techn. Hochschule.

(Eingegangen 27. August 1908.)

1) Ich habe absichtlich den Stromeffekt im Thermoelementkreise berechnet, da dieser Effekt (und nicht der im sekundären Kreise) wirklich (wie auch aus der Fig. 3 ersichtlich ist) gemessen wird. Rechnet man aus meinen Gleichungen (11) den Stromeffekt im sekundären Kreise (d. h. φ_1), dann kommt man zu denselben Schlußformeln, weil der Nenner (der in erster Linie die Änderung des Stromeffektes mit Verstimmung ausdrückt) unverändert bleibt.

2) M. Wien, Wied. Ann. **61**, 151, 1897.

BESPRECHUNGEN.

Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik für das Jahr 1907. Herausgegeben von J. M. Eder. 21. Jahrgang. gr. 8. VIII u. 673 S. Mit 290 Abbildungen im Text und 36 Kunstbeilagen. Halle a. S., W. Knapp. 1907. M. 8.—

A. **Freiherr von Hübl, Die Entwicklung der photographischen Bromsilber-Gelatineplatte bei zweifelhaft richtiger Exposition.** Dritte, umgearbeitete Auflage. (Enzyklopädie der Photographie Heft 31.) gr. 8. VIII u. 73 S. Mit einer Tafel. Halle a. S., W. Knapp. 1907. M. 2.40.

Lüppo-Cramer, Photographische Probleme. (Encyklopädie der Photographie Heft 58.) gr. 8. VIII u. 220 S. Mit 25 Mikrophotogrammen. Halle a. S., W. Knapp. 1907. M. 7.50.

P. **Hanneke, Photographisches Rezept-Taschenbuch.** Eine Sammlung von erprobten Rezepten für den Negativ- und Positivprozeß unter Berücksichtigung der neuesten Verfahren. gr. 16. 167 S. Berlin, G. Schmidt. 1907. In Leinwandband M. 2.25.

R. **Neuhauß, Anleitung zur Mikrophotographie.** Zweite, umgearbeitete Auflage. (Enzyklopädie der Photographie Heft 8.) gr. 8. VIII u. 38 S. Mit sechs in den Text gedruckten Abbildungen. Halle a. S., W. Knapp. 1908. M. 1.—

H. Schmidt, Photographisches Hilfsbuch für ernste Arbeit. II. Teil: Vom Negativ zum Bilde. gr. 8. VIII u. 226 S. Berlin, G. Schmidt. 1907. M. 4.—

H. Müller und P. Gebhardt, Die Mißerfolge in der Photographie und die Mittel zu ihrer Beseitigung. Ein Hilfsbuch für Liebhaber der Lichtbildkunst. II. Teil: Positiv-Verfahren. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. (Enzyklopädie der Photographie Heft 9.) gr. 8. VIII u. 120 S. Halle a. S., W. Knapp. 1907. M. 2.—

Auch im 21. Jahrgange von Eders Jahrbuch ist an der bewährten Überlieferung der früheren Jahrgänge festgehalten. Empfehlender Worte bedarf das bekannte Werk heute nicht mehr. Die Zusammenstellung wertvoller Originalabhandlungen mit der recht vollständigen Übersicht über die theoretischen und technischen Fortschritte des letzten Jahres macht das Werk seinem großen Leserkreise in gleicher Weise lesenswert und als Nachschlagebuch unentbehrlich.

Hübls Entwicklung der photographischen Bromsilber-Gelatineplatte ist bereits in dritter Auflage erschienen. Der experimentelle Teil ist immer noch unverändert geblieben, ein Zeichen, wie gut sich die Vorschriften über die Entwicklung photographischer Negative bewährten, an deren Ausarbeitung der Verf. sich erfolgreich beteiligt hat. Die Theorie der Entwicklung ist zum Teil neu bearbeitet worden, wobei die Fortschritte, besonders der physikalischen Chemie, gebührend berücksichtigt wurden.

Einen genaueren Einblick in den augenblicklichen Stand unserer Kenntnisse über photochemische Vorgänge bieten die „Photographischen Probleme" von Lüppo-Cramer. Dieses Buch stellt eine Fortsetzung der in der gleichen Sammlung erschienenen „wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Photographie" des Verf. dar. Das Buch enthält eine Zusammenstellung der Originalarbeiten des Verf., die in den Jahren 1902—1907 zum größten Teil in der „Photographischen Korrespondenz" erschienen sind. Der Verf. weist in seinen Arbeiten über die photochemische Veränderung der Silberhalogenide besonders auf die Bedeutung der Kolloidchemie hin. Wenn auch keine Lösung der behandelten Probleme gefunden wird, so werden diese doch ihrer Lösung bedeutend näher geführt. Das Interesse an photochemischen Fragen hat erfreulicherweise in den letzten Jahren so stark zugenommen, daß das sehr anregend geschriebene Buch hoffentlich recht viele Leser finden wird.

Hannekes photographisches Rezepttaschenbuch gibt, wie der Name sagt, eine Zusammenstellung bewährter Rezepte für photographische Prozesse allerart. Die große Erfahrung des Verf. auf diesem Gebiete bürgt dafür, daß nur sorgfältig erprobte Rezepte ausgewählt sind. Daher wird diese Zusammenstellung vielen willkommen sein.

Die Anleitung zur Mikrophotographie von Neuhauß gewährt nur einen kurzen Überblick darüber, in welcher Weise mikrophotographische Aufnahmen gemacht werden können. Es ist ein kurzer Auszug aus dem „Lehrbuch der Mikrophotographie" des Verf., das kürzlich in 3. Auflage erschien. Zur praktischen Ausführung mikrophotographischer Aufnahmen wird man wohl besser das ausführliche Lehrbuch zu Rate ziehen.

Von Schmidts photographischem Hilfsbuch und Müllers Mißerfolgen in der Photographie ist nun auch der zweite Teil erschienen. Der Empfehlung, welche ich dem ersten Teil der beiden Bücher vor zwei Jahren mit auf den Weg gab, brauche ich nichts hinzuzufügen.

Riesenfeld.

Universität und Schule. Vorträge auf der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner am 25. September 1907 zu Basel gehalten von F. Klein, P. Wendland, Al. Brandl, Ad. Harnack. Mit 1 Anhang. Leipzig, B. G. Teubner. 1907. M. 1.50.

An erster Stelle trägt Klein kurz einige seiner bekannten Gedanken über Reform des mathematischen und naturwissenschaftlichen Hochschulunterrichts vor.

Im Anhange befinden sich die Vorschläge der Unterrichtskommission. H. Kochan.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der deutschen Universität Prag Dr. O. Hönigschmid für anorganische Chemie.

Verliehen: Den Mitgliedern der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin Dr. K. Feußner, Dr. W. Jaeger und Dr. E. Brodhun der Titel Geh. Regierungsrat.

Ernannt: Der a. o. Professor der Mathematik an der Universität Marburg Dr. Ernst Neumann zum ord. Professor ebenda, der Privatdozent für Physik an der Universität Wien Dr. Stephan Meyer und die Privatdozenten für Chemie ebenda Dr. Adolf Franke, Dr. Jacques Pollak und Dr. Franz Wenzel zu a. o. Professoren, der Professor an der School of Technology in Manchester W. Jackson Pope zum ord. Professor der Chemie an der Universität Cambridge (England).

Beurlaubt: Der Privatdozent für chemische Gleichgewichtslehre an der Technischen Hochschule Berlin Dr. W. Guertler für ein Jahr als Associate des Research Laboratory for Applied Chemistry an der Technischen Hochschule Boston.

Gestorben: Der Professor der Geodäsie am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich Dr. Max Rosenmund, der Astronom der Astronomischen Nikolai-Hauptsternwarte in Pulkowo A. Hanskij, der Professor der Mathematik an der Universität St. Petersburg Dr. Alexander N. Korkin.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Emil Bose in Oliva bei Danzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.